गणित

कक्षा 8 के लिए पाठ्यपुस्तक

लेखक

आशा रानी सिंगल महेन्द्र शंकर

राम अवतार सुंदर लाल

संपादक

आशा रानी सिंगल

महेन्द्र शंकर

राम अवतार

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्

NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

प्राक्कथन

राष्ट्रीय शिक्षा नीति (एन.पी.ई.) 1986 (1992 में संशोधित) में सामान्य शिक्षा के एक अभिन्न अंग के रूप में गणित के पठन-पाठन की आवश्यकता पर स्पष्ट रूप से बल दिया है। चूंकि पाठ्यचर्या नवीनीकरण एक सतत् प्रक्रिया है, इसलिए प्रौद्योगिकी उन्मुख समाज में रहने के लिए विद्यार्थियों की बदलती आवश्यकताओं के अनुरूप गणित पाठ्यचर्या में समय-समय पर विभिन्न परिवर्तन होते रहे हैं। राष्ट्रव्यापी चर्चा एवं परामर्श के पश्चात्, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् (एन.सी.ई.आर.टी.) ने नवंबर 2000 में 'विद्यालयी शिक्षा के लिए राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा' (एन.सी.एफ.एस.ई-2000) का प्रकाशन किया। इसमें राष्ट्रीय शिक्षा नीति, 1986 में उपलब्ध मूल सिद्धांतों और निर्देशों पर पुनः बल दिया गया और विद्यालयी स्तर पर गणित से संबंधित अन्य मुद्दों को विस्तारपूर्वक बताया गया।

एन.सी.एफ.सी.ई. 2000 में, जो मूल रूप से एन.पी.ई. 1986 के अनुरूप है, दिए गए सामान्य उद्देश्यों की पूर्ति हेतु परिषद् ने उच्च प्राथमिक स्तर के लिए आवश्यक मार्गनिर्देश सहित गणित का पाठ्यक्रम विकसित किया। इस पाठ्यक्रम पर आधारित कक्षाओं VI और VII के लिए गणित की पाठ्यपुस्तकें क्रमशः वर्ष 2002 एवं 2003 में विकसित की गई थीं। कक्षा VIII की प्रस्तुत पाठ्यपुस्तक इस श्रृंखला की अंतिम पुस्तक है। पूर्व पाठ्यपुस्तकों की भांति, इस पाठ्यपुस्तक में भी गणित को विद्यार्थियों के आस-पास के परिवेश से संबंधित क्रियाकलापों और प्रेरक उदाहरणों द्वारा प्रस्तुत करने का प्रयत्न किया गया है।

विद्यार्थियों को ज्ञान प्रदान करने, उनमें दक्षताएँ विकसित करने तथा उनमें तर्कसंगतता की धारणा उभारने के लिए, पाठ्यपुस्तक में सम्मिलित विषयवस्तु और सुझाए गए क्रियाकलापों को संयोजित किया गया है। पाठ्यसामग्री और सुझाए गए क्रियाकलापों को हमारे देश की व्यापक विद्यालयी पद्धतियों की विभिन्न आवश्यकताओं, पृष्ठभूमि और पर्यावरण के अनुकूल बनाने का एक सार्थक प्रयास किया गया है। विषयवस्तु को सरल एवं रोचक भाषा में प्रस्तुत करने का विशेष ध्यान रखा गया है।

पाठ्यपुस्तक का प्रथम प्रारूप विशेषज्ञों के एक समूह द्वारा विकसित किया गया है जिन्हें अध्यापन और अनुसंधान का व्यापक अनुभव प्राप्त था। तत्पश्चात् एक समीक्षा कार्यशाला में इस प्रारूप की विषयवस्तु एवं उसके प्रस्तुतीकरण की विधि को पढ़ाने वाले शिक्षकों, शिक्षक-प्रशिक्षकों और विषय-विशेषज्ञों द्वारा गहन रूप से समीक्षात्मक विवेचना की गई। समीक्षा कार्यशाला में प्राप्त

टिप्पणियों और सुझावों पर लेखकों ने विचार किया और इस प्रारूप को उपयुक्त रूप से संशोधित कर अंतिम पांडुलिपि तैयार की गई। लेखक दल ने गणित की पूर्व पाठ्यपुस्तकों के प्रयोक्ताओं से प्राप्त सुझावों एवं पुनर्निवेशन का भी उपयोग किया। प्रस्तुत पाठ्यपुस्तक को विकसित करने में, जहाँ उपयुक्त एवं अनुकूल समझा गया, लेखक दल ने एन.सी.ई.आर.टी द्वारा पूर्व प्रकाशित पाठ्यपुस्तकों की कुछ सामग्री का भी प्रयोग किया है।

इतने अल्प समय में इस पुस्तक को विकसित करने के लिए मैं लेखक दल के सदस्यों, इसके अध्यक्ष, संपादकों, समीक्षकों तथा इनसे संबंधित संस्थाओं को धन्यवाद देता हूँ। पुस्तक में और अधिक सुधार हेतु एन.सी.ई.आर.टी. इस पुस्तक के प्रयोक्ताओं के सुझावों का स्वागत करेगी।

जगमोहन सिंह राजपूत
निदेशक
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्

नई दिल्ली
अक्तूबर, 2003

प्रस्तावना

औपचारिक शिक्षा के प्रारंभ से ही गणित विद्यालयी शिक्षा का एक अभिन्न अंग रहा है और इसने न केवल सभ्यता की उन्नति में बल्कि भौतिक विज्ञान और अन्य विषयों के विकास में भी प्रबल भूमिका निभाई है। चूँकि पाठ्यचर्या नवीनीकरण एक सतत् प्रक्रिया है, इसलिए समाज की बदलती आवश्यकताओं के अनुरूप गणित पाठ्यचर्या में समय-समय पर विभिन्न प्रकार के परिवर्तन हुए हैं। उच्च प्राथमिक स्तर पर गणित पाठ्यचर्या में सुधार कर उसे समयानुकूल बनाने का वर्तमान प्रयास प्रयोक्ता समूहों से पुनर्निवेशन, ज्ञान की नवीन विचारधारा के आविर्भाव और राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् (एन.सी.ई.आर.टी.) द्वारा विस्तृत चर्चा के उपरांत नवंबर 2000 में प्रकाशित *विद्यालयी शिक्षा के लिए राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा* (*एन.सी.एफ.ई.* 2000) में दिए गए पाठ्यचर्या संबंधी विभिन्न सरोकारों पर आधारित एक प्रयास है। इससे पहले शिक्षक-प्रशिक्षकों, विभिन्न परीक्षा बोर्डों से नामित व्यक्तियों, शिक्षा निदेशालयों और विभिन्न राज्यों/संघ राज्य क्षेत्रों की राज्य शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषदों (एस.सी.ई.आर.टी.), के प्रतिनिधियों, सामान्य जन एवं विद्यालयों, विश्वविद्यालयों, महाविद्यालयों और परिषद् के संकाय सदस्यों द्वारा 'पाठ्यचर्या रूपरेखा पर परिचर्चा दस्तावेज प्रारूप' तैयार किया गया।

राष्ट्रीय पाठ्यचर्या रूपरेखा से उच्च प्राथमिक स्तर पर गणित शिक्षण के संबंध में उभर कर आए कुछ सामान्य पाठ्यचर्या सरोकार इस प्रकार हैं :

- पाठ्यचर्या को सामाजिक परिवेश और (व्यक्ति विशेष के जन्म से संबंध) पूर्वाग्रहों को निष्प्रभावित करने तथा सार्वजनिक भाव एवं समानता की जागरूकता का सृजन करने योग्य होना चाहिए।
- बालिका शिक्षा।
- पर्यावरण संरक्षण।
- स्वदेशीय ज्ञान और प्राचीन काल से अब तक विज्ञान और गणित में भारत के योगदान का समुचित समावेश।
- अप्रचलित और अनावश्यक विषयवस्तु को हटाकर पाठ्यचर्या के बोझ में कमी तथा माध्यमिक स्तर पर गणित के शिक्षण के लिए आवश्यक ज्ञान एवं पृष्ठभूमि प्रदान करना।

उपरोक्त सरोकारों को ध्यान में रखते हुए, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् ने गणित की पाठ्यपुस्तकों को विकसित करने के लिए लेखक दलों का गठन किया। उच्च प्राथमिक स्तर का लेखक दल कक्षाओं, छठीं और सातवीं के लिए गणित की पाठ्यपुस्तकें पहले ही विकसित कर चुका है। कक्षा आठवीं के लिए गणित की वर्तमान पाठ्यपुस्तक इसी शृंखला की अगली पुस्तक है।

इस पुस्तक को तैयार करने में बहुत अधिक प्रयत्न किए गए हैं। सर्वप्रथम विभिन्न लेखकों द्वारा तैयार की गई प्रारूप सामग्री पर लेखक दल के सदस्यों ने परस्पर चर्चा की और इस सामग्री को उस पर प्राप्त टिप्पणियों एवं सुझावों के आधार पर संशोधित किया गया। इन संशोधित चर्चाओं में विद्यालयों में पढ़ाने वाले शिक्षकों की भी सहायता ली गई। सामग्री को फिर एक समीक्षा कार्यशाला में शिक्षकों एवं विशेषज्ञों के एक समूह के सम्मुख रखा गया। इस समीक्षा कार्यशाला के प्रतिभागियों द्वारा दी गई टिप्पणियों एवं सुझावों के आधार पर पांडुलिपि को अंतिम रूप प्रदान किया गया।

इस पाठ्यपुस्तक की प्रमुख विशेषताएँ निम्नलिखित हैं :

- जहां तक संभव हो सका है, विद्यार्थियों को प्रत्येक विषय का परिचय उनके आस-पास के परिवेश से संबंधित प्रेरक उदाहरणों के माध्यम से कराया गया है।
- पाठ्यपुस्तक में अवधारणाओं का विस्तारपूर्वक वर्णन किया गया है तथा अधिक संख्या में चित्र, हल किए गए उदाहरण और अभ्यास सम्मिलित किए गए हैं। ऐसा सोच-समझकर किया गया है ताकि विद्यार्थी में अवधारणाओं को बेहतर ढंग से समझकर प्रश्नों को बेहतर ढंग से हल करने की दक्षता में वृद्धि की जा सके।
- गणितीय तथ्यों की पुनः खोज करने और आरेखण एवं मापन के लिए उपयुक्त दक्षता के विकास हेतु अनेक क्रियाकलाप सुझाए गए हैं।
- राष्ट्रीय एकता, पर्यावरण संरक्षण, सामाजिक अवरोधों की समाप्ति, छोटे परिवार के मानदंडों का अनुपालन करने, लिंग भेदभाव मिटाने की आवश्यकता पर जागरूकता विकसित करने के लिए कुछ शाब्दिक समस्याओं को सम्मिलित किया गया है।
- विद्यार्थियों के मस्तिष्क में इन शाब्दिक समस्याओं के प्रमुख संदेश पहुँचने चाहिए तथा शिक्षण के समय अध्यापकों को इन तथ्यों के प्रति सचेत रहना चाहिए।
- पाठ्यपुस्तक में विद्यार्थियों के अवबोधन एवं परिपक्वता के स्तर के अनुरूप शब्दावली और पारिभाषिक शब्दों का प्रयोग किया गया है।
- प्रत्येक अध्याय के अंत में, महत्त्वपूर्ण संकल्पनाओं एवं परिणामों की एक सूची शीर्षक 'याद रखने योग्य बातें' के रूप में दी गई है।
- प्रत्येक एकक के अंत में ऐतिहासिक संदर्भों विशेषकर भारतीय योगदानों का शीर्षक 'अतीत के झरोखे से' के रूप में उल्लेख किया गया है।

मैं निदेशक, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् का धन्यवाद करती हूँ जिन्होंने पाठ्यचर्या नवीनीकरण की इस परियोजना का शुभारंभ किया और गणित शिक्षा में सुधार हेतु इस राष्ट्रीय प्रयास में हमें सम्मिलित होने का अवसर प्रदान किया जिससे हम गणित शिक्षा के सुधार के प्रति अपना व्यावसायिक ऋण चुका सकें। मैं अध्यक्ष, विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग को भी उनके गतिशील नेतृत्व, इस कार्य में भरपूर सहयोग देने तथा अन्य सुविधाएँ उपलब्ध कराने के लिए धन्यवाद देती हूँ। लेखक दल के अन्य सदस्य और समीक्षा कार्यशाला के सभी प्रतिभागी भी धन्यवाद के पात्र हैं। कुछ चित्रों को बनवाने में सहायता प्रदान करने के लिए मैं सी.आई.ई.टी. को भी धन्यवाद देती हूँ।

इस लंबी प्रस्तावना को समाप्त करते हुए मैं बार-बार और अधिकतर की जाने वाली आलोचनाओं का उल्लेख करना चाहूँगी कि किसी भी विषय में कोई भी पुस्तक अंतिम नहीं हो सकती। हमने अपनी ओर से उपलब्ध सीमित समय में अच्छी से अच्छी सामग्री प्रदान करने का भरसक प्रयास किया है, फिर भी हम स्वीकार करते हैं कि इसमें सुधार हो सकता है। इसमें सुधार हेतु सुझाव/टिप्पणियों का स्वागत है। मुझे आशा है कि पाठक इस पुस्तक को पढ़ते समय उतना ही आनंद लेंगे जितना हमें इसके लिखते समय प्राप्त हुआ है।

आशा रानी सिंगल
अध्यक्ष
लेखक दल

गांधी जी का जंतर

तुम्हें एक जंतर देता हूँ। जब भी तुम्हें संदेह हो या तुम्हारा अहम् तुम पर हावी होने लगे, तो यह कसौटी आज़माओ :

जो सबसे गरीब और कमज़ोर आदमी तुमने देखा हो, उसकी शक्ल याद करो और अपने दिल से पूछो कि जो कदम उठाने का तुम विचार कर रहे हो, वह उस आदमी के लिए कितना उपयोगी होगा। क्या उससे उसे कुछ लाभ पहुँचेगा? क्या उससे वह अपने ही जीवन और भाग्य पर कुछ काबू रख सकेगा? यानी क्या उससे उन करोड़ों लोगों को स्वराज्य मिल सकेगा, जिनके पेट भूखे हैं और आत्मा अतृप्त है?

तब तुम देखोगे कि तुम्हारा संदेह मिट रहा है और अहम् समाप्त होता जा रहा है।

मो० क० गांधी

हिंदी रूपांतर की समीक्षा कार्यगोष्ठी के सदस्य

आशा रानी सिंगल
प्रोफेसर गणित (सेवानिवृत्त)
चौधरी चरण सिंह विश्वविद्यालय, मेरठ
उत्तर प्रदेश

अजय कुमार सिंह
टी.जी.टी. (गणित)
रामजस सीनियर माध्यमिक विद्यालय
चाँदनी चौक, दिल्ली

अशोक कुमार गुप्ता
टी.जी.टी. (गणित)
सर्वोदय विद्यालय
जी.पी. ब्लाक, पीतमपुरा, दिल्ली

ज्योति झाम्ब
टी.जी.टी. (गणित)
राजकीय को-एड माध्यमिक विद्यालय
सैनिक विहार, दिल्ली

महेन्द्र शंकर
लेक्चरर (एस.जी.) गणित,
एन.सी.ई.आर.टी. (सेवानिवृत्त)
नई दिल्ली

एम. के. अग्रवाल
टी.जी.टी. (गणित)
राजकीय बाल सीनियर माध्यमिक विद्यालय
रेलवे कालोनी, तुगलकाबाद, नई दिल्ली

पी.के. तिवारी
सहायक आयुक्त (सेवानिवृत्त)
के.वी.एस., नई दिल्ली

प्रमोद लता जैन
लेक्चरर (सेवानिवृत्त)
आर.जी. कन्या इंटर कॉलेज
मेरठ, उत्तर प्रदेश

आर.पी. गिहारे
लेक्चरर (गणित)
ब्लाक संसाधन समन्वयक
जनपद शिक्षा केंद्र
आर.जी.एस.एम., चिचोली
बेतुल, मध्य प्रदेश

आर.के. पांडे
टी.जी.टी. (गणित)
डेमोंस्ट्रेशन स्कूल, आर.आई.ई. भोपाल
मध्य प्रदेश

रूचि सलारिया
टी.जी.टी. (गणित)
केंद्रीय विद्यालय नं. 4, दिल्ली कैंट

सरिता रेवरी
टी.जी.टी. (गणित)
राजकीय बालिका सीनियर माध्यमिक विद्यालय
नं. 1, रूप नगर, दिल्ली

सरताज उद्दीन सिद्दिकी
टी.जी.टी. (गणित)
सर्वोदय कन्या विद्यालय
जीनत महल, जाफराबाद
दिल्ली

सविता गर्ग
टी.जी.टी. (गणित)
सर्वोदय कन्या विद्यालय
बी–3 पश्चिम विहार, दिल्ली

सुंदर लाल
प्रोफेसर एवं अध्यक्ष, गणित विभाग
इंस्टीट्यूट ऑफ बेसिक साईसेस
बी.आर. अंबेडकर विश्वविद्यालय
आगरा, उत्तर प्रदेश

उर्मिल वधवा
टी.जी.टी. (गणित) (सेवानिवृत्त)
राजकीय बालिका सीनियर माध्यमिक विद्यालय
नं. 2, ए–ब्लाक, जनकपुरी, नई दिल्ली

एन.सी.ई.आर.टी संकाय
विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग

हुकुम सिंह
प्रोफेसर

वी.पी. सिंह
रीडर

प्रवीण कुमार चौरसिया
लेक्चरर

राम अवतार (**समन्वयक**)
रीडर

हिंदी रूपांतर

आशा रानी सिंगल महेन्द्र शंकर

सुंदर लाल

हिंदी रूपांतर के संपादक

आशा रानी सिंगल महेन्द्र शंकर

राम अवतार

विषय सूची

भारत का संविधान

भाग 4क

नागरिकों के मूल कर्तव्य

अनुच्छेद 51 क

मूल कर्तव्य – भारत के प्रत्येक नागरिक का यह कर्तव्य होगा कि वह -

(क) संविधान का पालन करे और उसके आदर्शों, संस्थाओं, राष्ट्रध्वज और राष्ट्रगान का आदर करे,

(ख) स्वतंत्रता के लिए हमारे राष्ट्रीय आंदोलन को प्रेरित करने वाले उच्च आदर्शों को हृदय में संजोए रखे और उनका पालन करे,

(ग) भारत की संप्रभुता, एकता और अखंडता की रक्षा करे और उसे अक्षुण्ण बनाए रखे,

(घ) देश की रक्षा करे और आह्वान किए जाने पर राष्ट्र की सेवा करे,

(ङ) भारत के सभी लोगों में समरसता और समान भ्रातृत्व की भावना का निर्माण करे जो धर्म, भाषा और प्रदेश या वर्ग पर आधारित सभी भेदभावों से परे हो, ऐसी प्रथाओं का त्याग करे जो महिलाओं के सम्मान के विरुद्ध हों,

(च) हमारी सामासिक संस्कृति की गौरवशाली परंपरा का महत्त्व समझे और उसका परिरक्षण करे,

(छ) प्राकृतिक पर्यावरण की, जिसके अंतर्गत वन, झील, नदी और वन्य जीव हैं, रक्षा करे और उसका संवर्धन करे तथा प्राणिमात्र के प्रति दयाभाव रखे,

(ज) वैज्ञानिक दृष्टिकोण, मानववाद और ज्ञानार्जन तथा सुधार की भावना का विकास करे,

(झ) सार्वजनिक संपत्ति को सुरक्षित रखे और हिंसा से दूर रहे, और

(ञ) व्यक्तिगत और सामूहिक गतिविधियों के सभी क्षेत्रों में उत्कर्ष की ओर बढ़ने का सतत् प्रयास करे, जिससे राष्ट्र निरंतर बढ़ते हुए प्रयत्न और उपलब्धि की नई ऊंचाइयों को छू सके।

अध्याय

वर्ग एवं वर्गमूल

1.1 भूमिका

पिछली कक्षा में, हम उन संख्याओं का अध्ययन कर चुके हैं जो परिमेय संख्याओं के पूर्णांकीय घातांक लेने पर प्राप्त होती हैं। जब किसी संख्या का घातांक 2 होता है, तो प्राप्त होने वाली संख्या *वर्ग* (*square*) या *वर्ग संख्या* कहलाती है तथा मूल संख्या वर्ग संख्या का *वर्गमूल* (*square root*) कहलाती है। इस अध्याय में, हम वर्ग संख्याओं तथा उनके वर्गमूलों का अध्ययन करेंगे। पहले हम वर्ग संख्याओं के कुछ प्रतिरूपों का वर्णन करेंगे तथा फिर दो या तीन अंकों वाली संख्याओं के वर्ग ज्ञात करने की कुछ सरल विधियों का वर्णन करेंगे। इसके पश्चात्, हम अभाज्य गुणनखंडन की विधि द्वारा पूर्ण वर्ग संख्याओं (अर्थात् पूर्णांकों के वर्गों) का वर्गमूल ज्ञात करना सीखेंगे। हम *विभाजन विधि* द्वारा पूर्ण वर्ग संख्याओं, परिमेय वर्ग संख्याओं तथा दशमलव वर्ग संख्याओं के वर्गमूल निकालना भी सीखेंगे। यदि संख्या पूर्ण वर्ग नहीं है, तो उसका वर्गमूल पूर्णांक के रूप में ज्ञात नहीं किया जा सकता। किंतु इस संख्या के लिए हम कोई ऐसी भिन्न या दशमलव संख्या ज्ञात करने का प्रयास करते हैं जिसका वर्ग दी गई संख्या के सन्निकट हो। ऐसी भिन्न या दशमलव संख्या को हम *सन्निकट वर्गमूल* कहते हैं। सन्निकट वर्गमूल के लिए, हम विभाजन विधि का प्रयोग करते हैं।

1.2 संख्या का वर्ग एवं वर्ग संख्याएँ

यदि m व n ऐसी प्राकृत संख्याएँ हैं कि $n = m^2$ है, तो n संख्या m का *वर्ग* है तथा n एक *वर्ग संख्या* है। उदाहरणार्थ, 4 $(= 2 \times 2 = 2^2)$, 2 का वर्ग है और इस प्रकार 4 एक वर्ग संख्या है। सारणी 1.1 में, संख्या 1 से 20 तक के वर्ग दिए गए हैं। इस प्रकार, यह 400 तक की सभी वर्ग संख्याओं की सारणी है। पूर्णांकों के वर्ग को *पूर्ण वर्ग* (*perfect square*) या *पूर्ण घात 2* या (*पूर्ण दूसरी घात*) भी कहते हैं।

सारणी 1.1 : 1 से 20 तक के वर्ग

संख्या	वर्ग	संख्या	वर्ग
1	1	11	121
2	4	12	144
3	9	13	169
4	16	14	196
5	25	15	225
6	36	16	256
7	49	17	289
8	64	18	324
9	81	19	361
10	100	20	400

हम देखते हैं कि प्रत्येक प्राकृत संख्या पूर्ण वर्ग हो, यह आवश्यक नहीं है। 100 तक मात्र 10 संख्याएँ ही पूर्ण वर्ग संख्याएँ हैं (देखिए सारणी 1.1)। 10000 तक मात्र 100 संख्याएँ ही पूर्ण वर्ग हैं। 3, 50, 1700, जैसी संख्याएँ पूर्ण वर्ग या वर्ग संख्याएँ नहीं हैं।

वर्ग संख्याओं का अध्ययन करते समय दो महत्त्वपूर्ण प्रश्न उपस्थित होते हैं:

1. किसी दी हुई संख्या के बारे में यह ज्ञात करना कि *संख्या पूर्ण वर्ग है अथवा नहीं।*
2. किसी पूर्ण वर्ग संख्या के लिए *वह संख्या ज्ञात करना जिसका पूर्ण वर्ग दी गई संख्या है।*

इन प्रश्नों के संतोषजनक उत्तर विज्ञान एवं प्रौद्योगिकी के अनेक क्षेत्रों में बहुत महत्त्व रखते हैं। इन प्रश्नों से संबंधित कुछ मूल तथ्यों को भली-भाँति समझने के लिए, हम वर्ग संख्याओं तथा ऐसी संख्याओं, जो वर्ग संख्याएँ नहीं हैं, के कुछ गुणों का अध्ययन करेंगे।

1.3 वर्ग संख्याओं के कुछ गुण व प्रतिरूप

I. *किसी भी वर्ग संख्या का अंत 2, 3, 7 या 8 के अंक में नहीं होता।* सारणी 1.1 पर दृष्टि डालने से ज्ञात होता है कि सभी वर्ग संख्याओं का इकाई का अंक 0, 1, 4, 5, 6 या 9 है। यह गुण 1 से 20 तक की संख्याओं का ही कोई विशेष गुण नहीं है। किसी

भी संख्या के वर्ग के अंत में इन्हीं में से कोई अंक होगा। एक से अधिक अंकों वाली एक संख्या n लें तथा इसका वर्ग करें। अब n का इकाई का अंक लें, इसका वर्ग करें तथा इस वर्ग का इकाई का अंक लें। यह इकाई का अंक, n^2 के इकाई के अंक के बराबर होगा। इस प्रकार, किसी भी प्राकृत संख्या के वर्ग का अंत अंक 0, 1, 4, 5, 6 या 9 में ही होगा। इसका अर्थ हुआ कि 2, 3, 7 या 8 के अंक में अंत होने वाली कोई भी संख्या वर्ग संख्या नहीं होगी। फलस्वरूप 52, 793, 15857, 888888 में से कोई भी संख्या वर्ग संख्या नहीं है। क्या इसका यह अर्थ निकाला जा सकता है कि 0, 1, 4, 5, 6 या 9 में अंत होने वाली सभी संख्याएँ वर्ग संख्याएँ होंगी? संख्याओं 10, 11, 14, 15, 19, 26 आदि के बारे में आप क्या कहेंगे?

टिप्पणी : 'अंक a में अंत होने वाली संख्या' का अर्थ हम यह लगाएँगे कि संख्या का इकाई का अंक a है।

II. *किसी संख्या के इकाई के अंक से संख्या के वर्ग के इकाई का अंक ज्ञात किया जा सकता है।* यदि संख्या के इकाई का अंक 1 अथवा 9 है, तो इसके वर्ग के इकाई का अंक 1 होगा। 2 अथवा 8 के अंक में अंत होने वाली संख्या के वर्ग के इकाई का अंक 4 होगा। 3 अथवा 7 के इकाई-अंक वाली संख्याओं के वर्ग 9 पर समाप्त होंगे। इसी प्रकार, यदि संख्या का इकाई-अंक 4 अथवा 6 है, तो संख्या के वर्ग का इकाई-अंक 6 होगा। 5 अथवा शून्य पर समाप्त होने वाली संख्याओं का वर्ग करने पर प्राप्त होने वाली संख्याएँ क्रमश: 5 व शून्य पर ही समाप्त होंगी।

III. *पूर्ण वर्ग के अंत में शून्यों की संख्या सदैव सम ही होती है।* यदि किसी संख्या के अंत में एक शून्य है, (जैसे 50), तो इसके वर्ग (2500) के अंत में दो शून्य होंगे। वस्तुत: संख्या के अंत में जितने शून्य होते हैं उसके वर्ग के अंत में उसके दुगुने शून्य होते हैं। उदाहरणार्थ, $300^2 = 90000$। इस प्रकार, *यदि किसी संख्या के अंत में शून्यों की संख्या विषम है, तो वह संख्या पूर्ण वर्ग नहीं होगी।*

IV. *सम (विषम) संख्या का वर्ग सम (विषम) होगा।* इस तथ्य की जाँच, 20 तक की संख्याओं के लिए, सारणी 1.1 से की जा सकती है। वस्तुत:, यह नियम सभी संख्याओं पर लागू होता है। यह बात उपर्युक्त गुण II से भी प्राप्त की जा सकती है (क्योंकि सम संख्याओं के इकाई-अंक 0, 2, 4, 6 व 8 होते हैं, तथा विषम संख्याएँ 1, 3, 5, 7 या 9 के अंक पर समाप्त होती हैं)।

V. *किसी भी वर्ग संख्या को 3 से भाग देने पर शेषफल 0 या 1 ही प्राप्त होता है।* इस तथ्य की जाँच सारणी 1.1 में दी गई वर्ग संख्याओं को 3 से विभाजित कर की जा सकती है। तथापि यह तथ्य अन्य सभी वर्ग संख्याओं के लिए भी सत्य है। सारणी 1.2 में, कुछ अन्य अभाज्य संख्याओं द्वारा वर्ग संख्याओं को विभाजित करने पर प्राप्त संभावित शेषफलों को दिया गया है।

सारणी 1.2

भाजक	*संभावित शेषफल*
3	0, 1
5	0, 1, 4
7	0, 1, 2, 4
11	0, 1, 3, 4, 5, 9
13	0, 1, 3, 4, 9, 10, 12

VI. सारणी 1.2 में दी गई संभावित शेषफलों की सूची से उन संख्याओं का पता लगाना संभव है जो पूर्ण वर्ग *नहीं* है। उदाहरण के लिए, यदि किसी संख्या को 3 से विभाजित करने पर शेषफल 2 है, तो वह संख्या पूर्ण वर्ग *नहीं* होगी।

VII. *यदि संख्या n पूर्ण वर्ग है, तो $2n$ पूर्ण वर्ग कदापि नहीं हो सकती।* दूसरे शब्दों में, यदि किसी प्राकृत सख्या q के लिए $n = q^2$ है, तो किसी भी प्राकृत संख्या p के लिए $2q^2 = p^2$ नहीं हो सकता। इस तथ्य की जाँच 200 तक की प्राकृत संख्याओं के लिए सारणी 1.1 से की जा सकती है। परंतु, यह कथन व्यापक रूप से सत्य है। वास्तव में यह भी सिद्ध किया जा सकता है कि *यदि n एक पूर्ण वर्ग संख्या है और t एक अभाज्य संख्या है, तो tn कभी भी पूर्ण वर्ग नहीं हो सकती।*

VIII. अंक 1 से बनने वाली संख्याओं जैसे 1, 11, 111, ... आदि के वर्ग एक रोचक प्रतिरूप प्रस्तुत करते हैं। यथा :

$$1^2 = 1$$
$$11^2 = 121$$
$$111^2 = 12321$$
$$. = .$$
$$. = .$$

$. = .$

$111111111^2 = 12345678987654321$

IX. वर्ग संख्याओं से संबंधित एक अन्य रोचक प्रतिरूप है :

$1^2 = 1$

$11^2 = 121$ व $1 + 2 + 1 = 2^2$

$111^2 = 12321$ व $1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 3^2$

$. = .$

$. = .$

$. = .$

$111111111^2 = 12345678987654321$ व $1 + 2 + \ldots + 2 + 1 = 9^2$

X. एक अन्य रोचक प्रतिरूप निम्न प्रकार है :

$$121 \times (1 + 2 + 1) = 484 = 22^2$$

$$12321 \times (1 + 2 + 3 + 2 + 1) = 110889 = 333^2$$

अर्थात् $11^2 \times$ (11^2 में अंकों का योगफल) $= 22^2$

$111^2 \times$ (111^2 में अंकों का योगफल) $= 333^2$

.

.

.

$111111111^2 \times$ (111111111^2 में अंकों का योगफल) $= 999999999^2$

प्रश्नावली 1.1

1. निम्नलिखित संख्याएँ पूर्ण वर्ग नहीं हैं। कारण बताइए :

(i) 1057 (ii) 23453 (iii) 7928 (iv) 222222

2. निम्नलिखित संख्याओं के वर्गों के इकाई के अंक क्या होंगे?

(i) 81 (ii) 272 (iii) 799 (iv) 3853

(v) 1234 (vi) 26387 (vii) 52698 (viii) 99880

(ix) 12796 (x) 55555

3. निम्नलिखित संख्याओं के पूर्ण वर्ग न होने का कारण बताइए :

(i) 64000 (ii) 89722 (iii) 222000 (iv) 505050

4. निम्नलिखित संख्याओं में से किन-किन का वर्ग एक विषम संख्या है?

(i) 431 (ii) 2826 (iii) 7779 (iv) 82004

5. दिखाइए कि निम्नलिखित संख्याएँ पूर्ण वर्ग संख्या नहीं हैं :

(i) 7927 (ii) 1058 (iii) 33453 (iv) 22222

(*संकेत :* गुण V का प्रयोग करें)

6. निम्नलिखित प्रतिरूपों का अवलोकन कर रिक्त स्थान भरिए :

$$11^2 = 1\,2\,1$$
$$101^2 = 1\,0\,2\,0\,1$$
$$1001^2 = 1\,0\,0\,2\,0\,0\,1$$
$$100001^2 = 1\ldots\ldots2\ldots\ldots1$$
$$10000001^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

7. निम्नलिखित प्रतिरूपों को देखकर, रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

$$11^2 = 1\,2\,1$$
$$101^2 = 1\,0\,2\,0\,1$$
$$10101^2 = 1\,0\,2\,0\,3\,0\,2\,0\,1$$
$$1010101^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots^2 = 1\,0\,2\,0\,3\,0\,4\,0\,5\,0\,4\,0\,3\,0\,2\,0\,1$$

8. दिए गए प्रतिरूप के आधार पर अज्ञात संख्याएँ ज्ञात कीजिए :

$$1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2$$
$$2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$$
$$3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$$
$$4^2 + 5^2 + __^2 = 21^2$$
$$5^2 + __^2 + 30^2 = 31^2$$
$$6^2 + 7^2 + __^2 = __^2$$

9. (पुस्तक में दिए गए) उचित प्रतिरूपों की सहायता से रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

(i) $\frac{333^2}{12321}$ = ... (ii) $\frac{666666^2}{12345654321}$ = ...

10. निम्नलिखित कथनों के लिए सत्य (T) अथवा असत्य (F) लिखिए :

(i) वर्ग संख्या में अंकों की संख्या सम होती है।

(ii) अभाज्य संख्या का वर्ग अभाज्य ही होता है।

(iii) दो वर्ग संख्याओं का योगफल एक वर्ग संख्या होता है।

(iv) दो वर्ग संख्याओं का अंतर एक वर्ग संख्या होता है।

(v) दो वर्ग संख्याओं का गुणनफल एक वर्ग संख्या होता है।

(vi) कोई भी वर्ग संख्या ऋणात्मक नहीं होती।

(vii) 50 व 60 के बीच कोई वर्ग संख्या नहीं है।

(viii) 200 तक मात्र 14 संख्याएँ ही वर्ग संख्याएँ हैं।

1.4 वर्ग करने की कुछ वैकल्पिक विधियाँ

किसी पूर्णांक का वर्ग करना एक साधारण प्रक्रिया है। पूर्णांक को स्वयं से सीधा-सीधा गुणा करना होता है। बड़ी संख्याओं के लिए गुणा करना कभी-कभी कठिन कार्य हो जाता है और इसमें समय भी अधिक लग सकता है। इस अनुच्छेद में, हम दो अथवा तीन अंकों की संख्याओं का वर्ग निकालने की कुछ वैकल्पिक विधियों की चर्चा करेंगे। दो अंकों का वर्ग प्राप्त करने की पहली विधि दो संख्याओं को गुणा करने की एक प्राचीन भारतीय विधि पर आधारित है। इसे हम *स्तंभ विधि (Column method)* कहेंगे। दो अंकों की संख्या के वर्ग का यह नियम सर्वसमिका $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ पर आधारित है।

किसी दो-अंकीय संख्या ab (जहाँ a दहाई-अंक व b इकाई-अंक है) का वर्ग करने के लिए, हम तीन स्तंभ बनाते हैं तथा इनमें संख्याओं a^2, $2a \times b$ तथा b^2 को निम्न प्रकार लिखते हैं (स्पष्टीकरण के लिए हम $ab = 86$ लेते हैं) :

स्तंभ I	*स्तंभ* II	*स्तंभ* III
a^2 $(8^2 = 64)$	$2a \times b$ $(2 \times 8 \times 6 = 96)$	b^2 $(6^2 = 36)$

इसके पश्चात्, हम निम्न चरणों में प्रक्रिया पूरी करते हैं :

चरण 1 : स्तंभ III में b^2 के इकाई-अंक को रेखांकित करें और दहाई-अंक यदि कोई है, तो स्तंभ II में उसे $2a \times b$ में जोड़ें।

I a^2	II $2a \times b$	III b^2
64	96 +3 99	3$\underline{6}$

चरण 2 : स्तंभ II में इकाई अंक को रेखांकित करें तथा दहाई-अंक को स्तंभ I में a^2 में जोड़ें।

a^2	$2a \times b$	b^2
64 +9 73	96 +3 9$\underline{9}$	3$\underline{6}$

चरण 3 : स्तंभ I की संख्या को रेखांकित करें।
रेखांकित अंकों से प्राप्त संख्या ही ab का वर्ग है।

a^2	$2a \times b$	b^2
64 +9 $\underline{73}$	96 +3 9$\underline{9}$	3$\underline{6}$

$86^2 = 7396$

उदाहरण 1 : (i) 65 व (ii) 37 का वर्ग ज्ञात कीजिए।

हल : (i) 65×65

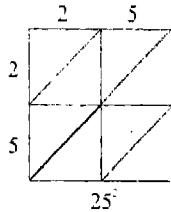
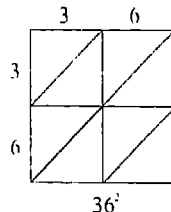
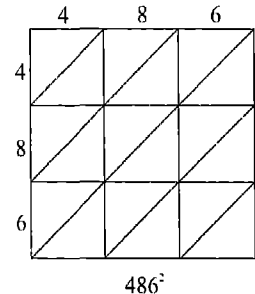
36 +6 $\underline{42}$	60 +2 6$\underline{2}$	2$\underline{5}$

(ii) 37×37

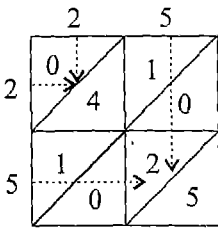
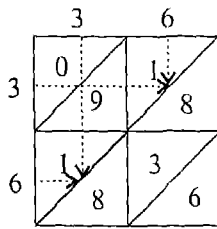
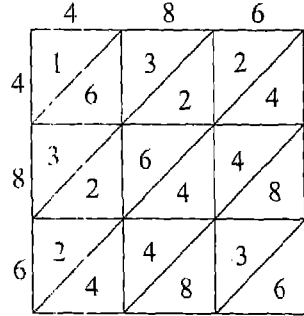
9 +4 $\underline{13}$	42 +4 4$\underline{6}$	4$\underline{9}$

$\therefore \quad 65^2 = 4225$ $\qquad \therefore \quad 37^2 = 1369$

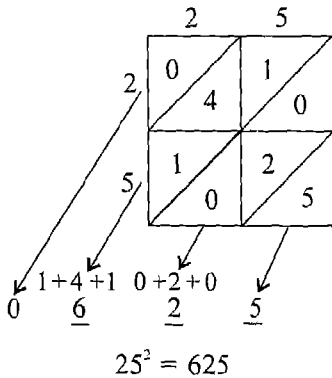
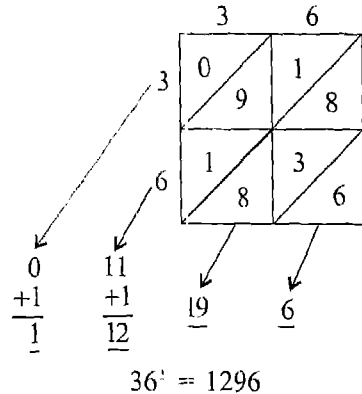
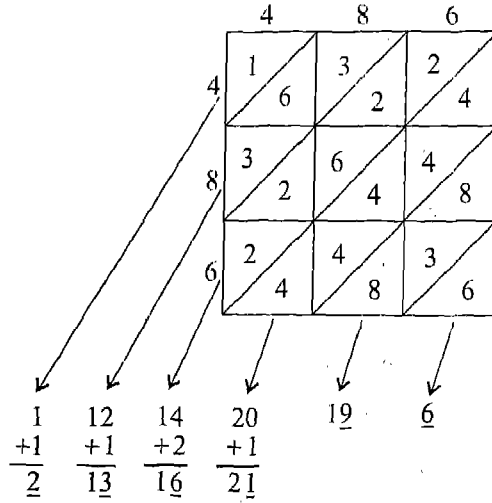
संख्याओं के अंक बढ़ने पर, उपर्युक्त विधि कुछ कठिन हो जाती है। इस स्थिति में, हम *विकर्ण विधि* (*Diagonal method*) का प्रयोग करते हैं। यह भी दो संख्याओं के गुणा करने की एक प्राचीन भारतीय विधि है। किंतु हम यहाँ इस विधि को संख्याओं 25, 36 व 486 के वर्ग ज्ञात करते हुए स्पष्ट करेंगे।

इसमें पहले हम एक वर्ग बनाते हैं और (अंकों की संख्या के अनुसार) इसे उपवर्गों में विभाजित करते हैं। इसके पश्चात् आकृति के अनुसार उपवर्गों के कुछ

आकृति 1.1 **(i)**

आकृति 1.2 **(i)**

आकृति 1.3 **(i)**

विकर्ण खींचते हैं तथा वर्ग की जाने वाली संख्या के अंकों को लिखते हैं।

अब हम पंक्ति व स्तंभ के अंकों को परस्पर गुणा करते हैं तथा गुणनफल को संबद्ध उपवर्ग में रखते हैं [आकृति 1.1 (ii), 1.2 (ii) तथा 1.3 (ii)]। यदि प्राप्त संख्या में एक ही अंक है, तो इसे विकर्ण के नीचे लिखते हैं। यदि गुणा करने पर द्विअंकीय संख्या प्राप्त होती है, तो दहाई-अंक विकर्ण के ऊपर तथा इकाई-अंक विकर्ण के नीचे लिखते हैं।

आकृति 1.1 **(ii)** *आकृति 1.2* **(ii)** *आकृति 1.3* **(ii)**

अब सबसे निचले विकर्ण के नीचे से अंकों को जोड़ना आरंभ करते हैं। योग करते समय इकाई-अंक को रेखांकित करते हैं तथा दहाई का अंक, यदि कोई हो तो, विकर्ण के ऊपर वाले योगफल में जोड़ देते हैं। यह प्रक्रिया सभी विकर्णों के लिए दोहराते हैं और फिर सबसे ऊपरी विकर्ण के ऊपर की संख्या को भी रेखांकित करते हैं। इस प्रक्रिया में रिक्त स्थानों में शून्य मान लेते हैं। इस प्रकार, रेखांकित अंकों से प्राप्त संख्या ही अभीष्ट वर्ग है [आकृति 1.1 (iii), 1.2 (iii) तथा 1.3 (iii)]।

$25^2 = 625$ $36^2 = 1296$

आकृति 1.1 **(iii)** *आकृति 1.2* **(iii)**

$486^2 = 236196$

आकृति 1.3 **(iii)**

टिप्पणी : वर्ग ज्ञात करने की यह विकर्ण विधि सभी संख्याओं के वर्ग ज्ञात करने के लिए सुलभ है; संख्या में अंक कितने भी हों।

प्रश्नावली 1.2

1. स्तंभ विधि द्वारा निम्नलिखित संख्याओं के वर्ग ज्ञात कीजिए। प्रचलित विधि द्वारा वर्ग प्राप्त कर परिणाम का सत्यापन कीजिए :

   (i) 25 (ii) 37 (iii) 54 (iv) 96 (v) 71

2. विकर्ण विधि द्वारा निम्नलिखित संख्याओं के वर्ग ज्ञात कीजिए :

   (i) 89 (ii) 276 (iii) 349 (iv) 293 (v) 161

3. निम्न संख्याओं के वर्ग ज्ञात करें :

   (i) 127 (ii) 235 (iii) 852 (iv) 251 (v) 501

4. संख्याओं

   (i) 35 (ii) 75 (iii) 95 (iv) 105 (v) 205

   के वर्ग निम्नलिखित प्रतिरूप के उपयोग द्वारा प्राप्त कीजिए :

   $25^2 = 2 \times (2 + 1)$ सौ $+ 25 = 625$

$45^2 = 4 \times (4 + 1)$ सौ $+ 25 = 2025$

$115^2 = 11 \times (11 + 1)$ सौ $+ 25 = 13225$

5. प्रतिरूपों

$52^2 = (5^2 + 2)$ सौ $+ 2^2 = 2704$

$57^2 = (5^2 + 7)$ सौ $+ 7^2 = 3249$

की सहायता से निम्न के वर्ग ज्ञात कीजिए :

(i) 51 (ii) 54 (iii) 56 (iv) 58 (v) 59

6. निम्नलिखित प्रतिरूपों को देखिए :

$511^2 = (250 + 11)$ हजार $+ 11^2 = 261121$

$590^2 = (250 + 90)$ हजार $+ 90^2 = 348100$

इनकी सहायता से निम्नलिखित संख्याओं के वर्ग ज्ञात कीजिए :

(i) 509 (ii) 515 (iii) 525 (iv) 580 (v) 534

7. सर्वसमिका

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

का प्रयोग करते हुए निम्न के वर्ग ज्ञात कीजिए :

(i) 509 (ii) 211 (iii) 625

8. सर्वसमिका

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

का उपयोग करते हुए, निम्नलिखित संख्याओं के वर्ग ज्ञात कीजिए :

(i) 491 (ii) 189 (iii) 575

1.5 वर्गमूल

यदि $n = m^2$ है, तो हम कहते हैं कि *m संख्या n का एक वर्गमूल* है। इस प्रकार, 4 का वर्गमूल 2 है, चूँकि $4 = 2^2$ है। इसी प्रकार, 25 का वर्गमूल 5 है, चूँकि $25 = 5^2$ है। इसी प्रकार 49 का वर्गमूल 7 तथा 121 का वर्गमूल 11 है, आदि। इस प्रकार, हम देखतें हैं कि यदि n एक पूर्ण वर्ग संख्या है, तो इसका वर्गमूल धनात्मक पूर्णांक है। यदि n पूर्ण वर्ग नहीं है, तो ऐसा कोई पूर्णांक m नहीं है जिसके लिए n का वर्गमूल m हो। अर्थात् n का पूर्णांक वर्गमूल नहीं है। इस अनुच्छेद में वर्ग से हमारा आशय पूर्ण वर्ग से तथा वर्गमूल से आशय पूर्णांक

वर्गमूल से है।

अनुच्छेद 1.3 में चर्चित वर्ग संख्याओं के गुणों के आधार पर, हमें वर्गमूलों के विषय में निम्नलिखित तथ्य प्राप्त होते हैं:

I. *इकाई अंक 2, 3, 7 या 8 वाली संख्याएँ पूर्ण वर्ग नहीं हैं। अत: इन संख्याओं के वर्गमूल नहीं होते।*

II. *यदि किसी संख्या का वर्गमूल ज्ञात किया जा सकता है, तो उसका इकाई-अंक 0, 1, 4, 5, 6 या 9 होना चाहिए।*

उपर्युक्त गुण II द्वारा वर्ग संख्याओं के इकाई अंकों तथा इनके वर्गमूलों के इकाई अंकों में संबंध आगे दी हुई सारणी के अनुसार हैं :

वर्ग संख्या का इकाई-अंक	0	1	4	5	6	9
वर्गमूल का इकाई-अंक	0	1 या 9	2 या 8	5	4 या 6	3 या 7

III. *यदि किसी संख्या के अंत में आने वाले शून्यों की संख्या विषम है, तो उस संख्या का वर्गमूल ज्ञात नहीं किया जा सकता। यदि किसी वर्ग संख्या के बाद में लगे शून्यों की संख्या सम है, तो इस प्रकार प्राप्त संख्या का वर्गमूल ज्ञात किया जा सकता है।* वर्गमूल के अंत में शून्यों की संख्या उस संख्या के अंत में शून्यों की संख्या की आधी होगी।

IV. *सम वर्ग संख्या का वर्गमूल सम तथा विषम वर्ग संख्या का वर्गमूल विषम होता है।*

V. ध्यान दीजिए कि जिस प्रकार $2^2 = 4, 3^2 = 9, 4^2 = 16$ आदि हैं, उसी प्रकार $(-2)^2 = (-2) \times (-2) = 4, (-3^2) = (-3) \times (-3) = 9, (-4)^2 = 16$ आदि होते हैं। इससे स्पष्ट है कि किसी भी धनात्मक या ऋणात्मक संख्या का वर्ग सदैव धनात्मक होता है। दूसरे शब्दों में कहें, तो ऋणात्मक संख्याएँ वर्ग संख्याएँ नहीं होतीं *और इस प्रकार परिमेय संख्या-निकाय में इनका वर्गमूल नहीं होता।* (कुछ संख्या निकायों में ऋणात्मक संख्याओं के भी वर्गमूल ज्ञात किए जा सकते हैं।)

जैसा कि हमने ऊपर देखा, $2^2 = (-2)^2 = 4$। इस प्रकार 2 तथा −2 दोनों ही 4 के वर्गमूल हैं। इसी प्रकार, अन्य वर्ग संख्याओं के भी दो वर्गमूल होते हैं- एक धनात्मक तथा दूसरा ऋणात्मक। परंतु वर्तमान स्तर पर हम केवल धनात्मक वर्गमूल पर ही विचार करेंगे। संकेत रूप

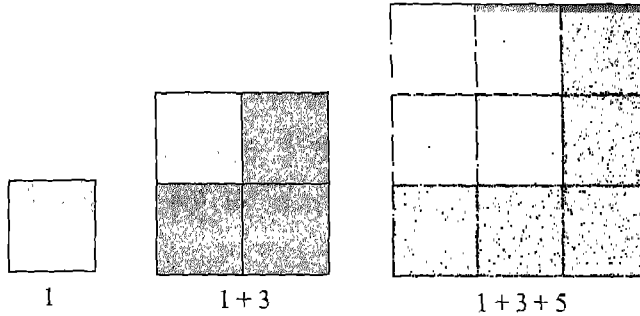
में 4 के धनात्मक वर्गमूल को हम $\sqrt[2]{4}$ या $\sqrt{4}$ से दर्शाते हैं। संकेत '$\sqrt{\ }$' धनात्मक वर्गमूल के लिए प्रयुक्त होता है। इस प्रकार $\sqrt{4} = 2$ है। $\sqrt{4} = -2$ लिखना अशुद्ध है।

अब हम वर्गमूल ज्ञात करने की कुछ विधियों का वर्णन करेंगे।

हम देखते हैं कि

$1 = 1^2$

$1 + 3 = 2^2$ (पहली दो विषम संख्याओं का योगफल $= 2^2$)

$1 + 3 + 5 = 3^2$ (पहली तीन विषम संख्याओं का योगफल $= 3^2$)

आकृति 1.4

व्यापक रूप में,

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

अर्थात् पहली n विषम संख्याओं का योगफल n^2 होता है। इस परिणाम को हम वर्ग संख्याओं का वर्गमूल निकालने के लिए निम्न प्रकार प्रयोग कर सकते हैं :

माने लें कि हमें संख्या n का वर्गमूल ज्ञात करना है। n से हम विषम संख्याओं 1, 3, 5, ... को उत्तरोत्तर एक-एक करके घटाते हैं। यदि n एक पूर्ण वर्ग संख्या है, तो इस प्रक्रिया में हमें कहीं शून्य अवश्य प्राप्त होगा। जितनी बार घटाने के पश्चात् शून्य प्राप्त होता है, वह संख्या ही n का वर्गमूल होती है। उदाहरण के लिए, 49 ($= 7^2$) लें। अब,

(i) $49 - 1 = 48$, (ii) $48 - 3 = 45$, (iii) $45 - 5 = 40$, (iv) $40 - 7 = 33$,

(v) $33 - 9 = 24$, (vi) $24 - 11 = 13$, (vii) $13 - 13 = 0$

यहाँ घटाने की प्रक्रिया 7 बार की गई है। अत:, $\sqrt{49} = 7$ है।

वर्गमूल ज्ञात करने की यह सरलतम विधि है तथा छोटी संख्याओं का वर्गमूल ज्ञात करने के लिए सुविधाजनक है। लेकिन, बड़ी संख्याओं के लिए यह एक धीमी तथा लंबी प्रक्रिया है। इनके वर्गमूल निकालने के लिए हमारे पास अधिक प्रभावी विधियाँ विद्यमान हैं।

1.6 वर्गमूल ज्ञात करने की अभाज्य गुणनखंडन विधि

निम्नलिखित गुणनखंडनों पर विचार करें :

$6 = 2 \times 3$	$6^2 = (2 \times 3) \times (2 \times 3) = \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3}$
$8 = 2 \times 2 \times 2$	$8^2 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2}$
$12 = 2 \times 2 \times 3$	$12^2 = (2 \times 2 \times 3) \times (2 \times 2 \times 3) = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3}$

हम देखते हैं कि,

(i) यदि p संख्या n का एक अभाज्य गुणनखंड है, तो $p \times p$ संख्या n^2 का एक गुणनखंड है।

(ii) यदि p एक अभाज्य संख्या है और $p \times p$, n^2 का एक गुणनखंड है, तो p, n का एक गुणनखंड है।

(iii) n^2 के अभाज्य गुणनखंडों के ऐसे युग्म बनाए जा सकते हैं जिनमें प्रत्येक युग्म के दोनों गुणनखंड समान हों।

इस प्रकार किसी वर्ग संख्या n का वर्गमूल प्राप्त करने की प्रक्रिया निम्न चरणों में की जा सकती है :

(i) n का अभाज्य गुणनखंड लिखिए। गुणनखंडों के युग्म इस प्रकार बनाइए कि प्रत्येक युग्म में अभाज्य गुणनखंड समान हों।

(ii) प्रत्येक युग्म से एक अभाज्य गुणनखंड का चयन कर इन सभी अभाज्य गुणनखंडों को गुणा कीजिए।

(iii) ऊपर (ii) में प्राप्त गुणनफल ही n का वर्गमूल है।

उदाहरण 2 : 8100 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल : $8100 = \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3} \times \underline{3 \times 3} \times \underline{5 \times 5}$

$\therefore \sqrt{8100} = 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 90$

2	8100
2	4050
3	2025
3	675
3	225
3	75
5	25
	5

उदाहरण 3 : क्या 2352 एक पूर्ण वर्ग संख्या है? यदि नहीं, तो वह लघुतम संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 2352 को गुणा करने पर गुणनफल पूर्ण वर्ग बन जाए। नई संख्या का वर्गमूल भी ज्ञात कीजिए।

2	2352
2	1176
2	588
2	294
3	147
7	49
	7

हल : $2352 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times 3 \times \underline{7 \times 7}$

यहाँ हम देखते हैं कि अभाज्य संख्या 3 युग्म रूप में उपस्थित नहीं है। अतः, 2352 पूर्ण वर्ग नहीं है। यदि इस संख्या को हम 3 से गुणा करें, तो

$2352 \times 3 = 7056 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3} \times \underline{7 \times 7}$

यहाँ प्रत्येक अभाज्य संख्या युग्म रूप में उपस्थित है।

अतः, $2352 \times 3 = 7056$ एक पूर्ण वर्ग संख्या है। इस प्रकार, अभीष्ट लघुतम संख्या 3 है। साथ ही, अभीष्ट वर्गमूल है :

$\sqrt{7056} = 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 84$

उदाहरण 4 : वह लघुतम संख्या ज्ञात कीजिए, जिससे 9408 को विभाजित करने पर एक पूर्ण वर्ग प्राप्त हो। भागफल का वर्गमूल भी ज्ञात करें।

हल : $9408 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times 3 \times \underline{7 \times 7}$

यदि हम 9408 को 3 से विभाजित करें, तो

$9408 \div 3 = 3136 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{7 \times 7}$, जो एक पूर्ण वर्ग है। अतः, अभीष्ट संख्या 3 है तथा अभीष्ट वर्गमूल है :

$\sqrt{3136} = 2 \times 2 \times 2 \times 7 = 56$

प्रश्नावली 1.3

1. निम्नलिखित में से कौन सी संख्याएँ पूर्ण वर्ग नहीं हैं?

   (i) 81 (ii) 92 (iii) 121 (iv) 132

2. जाँच की जिए कि क्या निम्नलिखित संख्याएँ पूर्ण दूसरी घात हैं?

   (i) 153 (ii) 257 (iii) 408 (iv) 441

3. निम्नलिखित संख्याओं के वर्गमूलों के संभावित इकाई-अंक लिखिए। किन संख्याओं के वर्गमूल विषम हैं?

   (i) 9801 (ii) 99856 (iii) 998001 (iv) 657666025

4. उत्तरोत्तर व्यवकलन (घटाने) द्वारा 121 व 169 के वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

5. अभाज्य गुणनखंडन द्वारा निम्नलिखित संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात कीजिए:

   (i) 729 (ii) 400 (iii) 1764 (iv) 4096

6. निम्नलिखित सख्याओं के अभाज्य गुणनखंड लिखिए और फिर इनके वर्गमूल ज्ञात कीजिए :

   (i) 7744 (ii) 9604 (iii) 5929 (iv) 7056

7. निम्नलिखित सख्याओं की पूर्ण दूसरी घात के लिए जाँच कीजिए। यदि उत्तर हाँ में है, तो उनके वर्गमूल ज्ञात कीजिए :

   (i) 1936 (ii) 8281

8. निम्नलिखित सख्याओं में से प्रत्येक के लिए वह लघुतम संख्या ज्ञात कीजिए जिससे गुणा करने पर एक पूर्ण वर्ग संख्या प्राप्त हो जाए। इस प्रकार प्राप्त पूर्ण वर्ग संख्या का वर्गमूल भी ज्ञात कीजिए :

   (i) 180 (ii) 1458 (iii) 1200 (iv) 1008 (v) 2028

9. निम्नलिखित में से प्रत्येक संख्या के लिए वह लघुतम संख्या ज्ञात कीजिए जिससे विभाजित करने पर एक पूर्ण वर्ग संख्या प्राप्त हो जाए। इस प्रकार प्राप्त वर्ग संख्या का वर्गमूल भी ज्ञात कीजिए।

   (i) 180 (ii) 3645 (iii) 2800 (iv) 45056

10. एक विद्यालय की कक्षा 8 के विद्यार्थियों ने प्रधानमंत्री राष्ट्रीय राहत कोष के लिए 2401 रु एकत्रित किए। यदि प्रत्येक विद्यार्थी द्वारा दान दिए गए रुपयों की संख्या कक्षा में विद्यार्थियों की संख्या के बराबर हों, तो कक्षा में कुल कितने विद्यार्थी हैं?

11. एक शारीरिक व्यायाम शिक्षक 6000 विद्यार्थियों में से अधिकतम विद्यार्थियों को मैदान में इस प्रकार व्यवस्थित करना चाहते हैं कि पंक्तियों व स्तंभों की संख्या समान रहे। यदि इस प्रकार व्यवस्थित करने के उपरांत 71 विद्यार्थी शेष बच जाते हैं, तो पंक्तियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

1.7 वर्गमूल ज्ञात करने की विभाजन विधि

वर्गमूल ज्ञात करने की अभाज्य गुणनखंड विधि तभी तक प्रभावी होती है जब तक संख्या के अभाज्य गुणनखंड छोटे होते हैं बड़े गुणनखंडों की दशा में यह प्रक्रिया कठिन तथा लंबी हो जाती है। इस कठिनाई से बचने के लिए, हम एक वैकल्पिक विधि, जिसे *विभाजन विधि* कहते हैं, का प्रयोग करते हैं। इसके लिए यह जानना आवश्यक होता है कि दी गई पूर्ण वर्ग संख्या के वर्गमूल में कितने अंक होंगे।

हम जानते हैं कि

$1^2 = 1, 9^2 = 81$ तथा $10^2 = 100$

इस प्रकार, एकअंकीय संख्या का वर्ग अधिकतम दो अंकों की संख्या है। चूँकि तीन अंकों की लघुतम संख्या 100 है और इसका वर्गमूल 10, दो अंकों की संख्या है, अत: एक अथवा दो अंकों की (पूर्ण वर्ग) संख्याओं का वर्गमूल एकअंकीय संख्या होता है।

इसी प्रकार, $10^2 = 100, 99^2 = 9801$ तथा $100^2 = 10000$ से स्पष्ट है कि यदि वर्ग संख्या में तीन अथवा चार अंक हैं, तो इसके वर्गमूल में दो अंक होंगे। पाँच अथवा छ: अंकों की वर्ग संख्या का वर्गमूल तीनअंकीय होगा, आदि।

किसी वर्ग संख्या के वर्गमूल में अंकों की संख्या जानने की एक सरल विधि यह है कि इकाई-अंक से प्रारंभ कर संख्या के अंकों के युग्म बनाते हैं और प्रत्येक युग्म के ऊपर एक दंड (bar) बनाते हैं। यदि संख्या n के अंकों की संख्या विषम है, तो अंतिम बचे एक अंक पर भी दंड लगाते हैं। इन दंडों की संख्या ही n के वर्गमूल में अंकों की संख्या होती है। उदाहरण के लिए, यदि $n = 256$ है, तो $\sqrt{n}$ में दो अंक होंगे, क्योंकि यहाँ दो दंड ($\overline{2}\ \overline{56}$) हैं। इसी प्रकार, 783225 के वर्गमूल में तीन अंक होंगे, क्योंकि यहाँ तीन दंड हैं ($\overline{78}\ \overline{32}\ \overline{25}$)।

विभाजन विधि को हम एक उदाहरण द्वारा स्पष्ट करेंगे। मान लें कि यहाँ वर्ग संख्या 531441 है।

चरण 1 : इकाई के अंक से आरंभ कर अंकों के प्रत्येक युग्म पर एक दंड लगाते हैं।

$\overline{53}\,\overline{14}\,\overline{41}$

चरण 2 : वह बड़ी-से-बड़ी संख्या ज्ञात करें जिसका वर्ग सबसे बाईं ओर के दंड के नीचे लिखी संख्या से छोटा या उसके बराबर हो। $(7^2 < 53 < 8^2)$। इस संख्या को भाजक तथा सबसे बाईं ओर के दंड

$$\begin{array}{r|l} & \mathbf{7} \\ \hline 7 & \overline{\mathbf{53}}\,\overline{14}\,\overline{41} \\ & \underline{\mathbf{49}} \\ & \mathbf{4} \end{array}$$

के नीचे वाली संख्या को भाज्य मानकर शेषफल प्राप्त करें (ध्यान दें कि इस चरण में भाजक तथा भागफल समान हैं)।

```
   |  7
---+----------
  7|  53 14 41
   |  49
   |  4 14
```

चरण 3 : शेषफल के दाईं ओर अगले दंड के नीचे वाली संख्या उतारते हैं। इस प्रकार प्राप्त संख्या नया भाज्य है।

चरण 4 : भागफल को दुगुना करें तथा इसके दाईं ओर, एक रिक्त स्थान नए संभावित भाजक के अगले संभावित अंक के लिए छोड़ते हुए लिखें।

```
     |  7
-----+----------
    7|  53 14 41
     |  49
14 – |  4 14
```

चरण 5 : इस रिक्त स्थान को भरने के लिए बड़े-से-बड़े अंक की खोज इस प्रकार करें कि यह अंक भागफल का अगला अंक बन सके।

$(142 \times 2 = 284 < 414,\ 143 \times 3 = 429 > 414)$

अब विभाजन की क्रिया कर शेषफल प्राप्त करें।

```
    |  72
----+----------
   7|  53 14 41
    |  49
 142|  414
    |  284
    |  130
```

चरण 6 : अगले दंड के नीचे वाली संख्या को नए शेषफल के दाईं ओर उतारें।

```
    |  72
----+----------
   7|  53 14 41
    |  49
 142|  414
    |  284
    |  13041
```

चरण 7 : चरण 4, 5 व 6 को तब तक दोहराएँ जब तक सभी दंडों पर क्रिया पूरी न हो जाए। अंतिम भागफल ही वर्गमूल है।

अत: $\sqrt{531441} = 729$

```
    |  729
----+----------
   7|  53 14 41
    |  49
 142|  414
    |  284
1449|  13041
    |  13041
    |  0
```

टिप्पणी : चरण 5 में संख्या 14 के बाद अंक 2 ज्ञात करने के लिए हम $41 \div 14$ पर विचार करते हैं। इसी प्रकार, चरण 7 में 144 के बाद 9 के लिए हम $1304 \div 144$ या $130 \div 14$ पर विचार करते हैं। यहाँ वर्गमूल का इकाई अंक 9 है। इसे ज्ञात करने के लिए हम वर्ग संख्या के इकाई अंक पर भी विचार कर सकते हैं। यहाँ वर्ग संख्या 531441 है और इसका इकाई अंक 1 है। अत: वर्गमूल का इकाई अंक केवल 1 या 9 ही हो सकता है। चूँकि 1 को आसानी से जाँच कर छोड़ा जा सकता है, अत: अभीष्ट अंक 9 ही हो सकता है।

उदाहरण 5 : संख्या 363609 का वर्गमूल निकालिए।

हल :

```
      | 603
    --|--------
    6 | 36 36 09
      | 36
  120 |  0 36
      |  0 00
 1203 |    3609
      |    3609
      |       0
```

∴ $\sqrt{363609} = 603$

टिप्पणी : यहाँ हम $03 \div 12$ पर विचार कर 12 के बाद शून्य प्राप्त करते हैं। 120 के बाद हम 3 पर विचार करते हैं, क्योंकि वर्ग संख्या का इकाई अंक 9 है। (वैसे हम $360 \div 120$ से भी 3 प्राप्त कर सकते हैं)।

यद्‌यपि यह विधि बड़ी संख्याओं के लिए अधिक उपयुक्त है, परंतु इस विधि से छोटी, तीन या चार अंकों की संख्याओं के वर्गमूल भी ज्ञात किए जा सकते हैं।

उदाहरण 6 : निम्नलिखित संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात कीजिए :

(i) 529 (ii) 1296

हल : (i)

```
    | 23
  --|------
  2 | 5 29
    | 4
 43 | 129
    | 129
    |   0
```

∴ $\sqrt{529} = 23$

(ii)

```
    | 36
  --|------
  3 | 12 96
    |  9
 66 | 396
    | 396
    |   0
```

∴ $\sqrt{1296} = 36$

उदाहरण 7 : वह लघुतम संख्या ज्ञात कीजिए जिसे 893304 में से घटाने पर एक पूर्ण वर्ग प्राप्त हो जाए।

हल:

```
      | 945
    --|---------
    9 | 89 33 04
      | 81
  184 |  833
      |  736
 1885 |   9704
      |   9425
      |    279
```

अत: यदि 893304 में से 279 घटा दिया जाए, तो प्राप्त संख्या एक पूर्ण वर्ग होगी तथा इसका वर्गमूल 945 होगा।

उदाहरण 8 : वह लघुतम संख्या ज्ञात करें जिसे 893304 में जोड़ने पर एक पूर्ण वर्ग प्राप्त हो जाए।

हल : उपर्युक्त उदाहरण की भाँति हम देखते हैं कि $893304 > 945^2$। अगली पूर्ण वर्ग संख्या 946^2 अर्थात् 894916 है। अत:, जोड़े जाने वाली लघुतम संख्या है: 894916 – 893304 अर्थात् 1612।

चार अंकों तक की वर्ग संख्याओं का वर्गमूल बिना विभाजन द्वारा निम्नलिखित तीन चरणों में ज्ञात किया जा सकता है।

चरण 1 : वह बड़े-से-बड़ा अंक ज्ञात करें जिसका वर्ग सबसे बाईं ओर के दंड के नीचे वाली संख्या के बराबर या उससे छोटा है। यह वर्गमूल का दहाई अंक है।

चरण 2 : अनुच्छेद 1.5 में दी गई सारणी की सहायता से वर्गमूल के संभावित इकाई अंक का अनुमान करें। इकाई अंक 1 या 9 है।

चरण 3 : संभावित अंकों से वर्गमूल बनाकर तथा वर्ग कर सही अंक प्राप्त करें।

स्पष्टीकरण :

$\sqrt{\overline{98}\ \overline{01}} = ?$

$\because \quad 9^2 = 81$

यह सबसे बड़ा वर्ग ≤ 98

$\therefore \quad \sqrt{\overline{98}\ \overline{01}} = 9\square$

तथा इकाई अंक 1 अथवा 9 है।

$91^2 = 8281 \neq 9801$

$\therefore \quad \sqrt{9801} = 99$

उदाहरण 9 : वर्गमूल ज्ञात करें :

(i) 256 (ii) 6561

हल : (i) दंड लगाने पर हमें प्राप्त होता है: $\bar{2}\,\overline{56}$। अत: दहाई अंक 1 है। वर्गमूल का संभावित इकाई अंक 4 अथवा 6 है। अत: वर्गमूल 14 अथवा 16 है।

अब $14^2 = 196 \neq 256$

अत: $\sqrt{256} = 16$

(ii) $\sqrt{6561} = 81$ या 89

चूँकि 6561, 8100 ($=90^2$) की अपेक्षा 6400 ($=80^2$) के अधिक निकट है, अत: $\sqrt{6561}$, 90 की अपेक्षा 80 के अधिक निकट है।

$\therefore \quad \sqrt{6561} = 81$

प्रश्नावली 1.4

1. निम्नलिखित संख्याओं के वर्गमूलों में अंकों की संख्याएँ बताइए :

   (i) 64 (ii) 144 (iii) 4489 (iv) 27225 (v) 390625

2. किसी संख्या के इकाई अंक पर एक बिंदु लगाएँ। अब एक-एक अंक छोड़कर बिंदु लगाते जाएँ। इस प्रकार प्राप्त बिंदुओं की संख्या ही संख्या के वर्गमूल में अंकों की संख्या होती है। इस विधि द्वारा निम्न संख्याओं के वर्गमूलों में अंकों की संख्याएँ बताइए :

   (i) 1234321 (ii) 21224449 (iii) 3915380329

3. विभाजन विधि द्वारा निम्नलिखित संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात कीजिए :

   (i) 44100 (ii) 27225 (iii) 54756 (iv) 49284 (v) 99856

4. निम्नलिखित संख्याओं के वर्गमूल विभाजन विधि से प्राप्त कीजिए :

   (i) 390625 (ii) 119025 (iii) 193600

5. निम्नलिखित संख्याओं के वर्गमूल उनके इकाई व दहाई के अंक ज्ञात कर प्राप्त करें :

   (i) 2304 (ii) 4489 (iii) 3481 (iv) 529

6. निम्नलिखित संख्याओं के वर्गमूल निकालिए :

   (i) 1444 (ii) 1849 (iii) 5776 (iv) 7921

7. निम्नलिखित संख्याओं में से प्रत्येक के लिए वह लघुतम संख्या ज्ञात कीजिए जिसे संख्या में से घटाने पर एक पूर्ण वर्ग प्राप्त हो जाए :

   (i) 2361 (ii) 4931 (iii) 18265 (iv) 390700

8. प्रश्न 7 की प्रत्येक संख्या के लिए वह लघुतम संख्या ज्ञात कीजिए जिसे संख्या में जोड़ने पर एक पूर्ण वर्ग प्राप्त हो जाए।

1.8 परिमेय संख्या का वर्गमूल

पूर्ण वर्ग 25 व 36 पर विचार करें।

$\sqrt{25 \times 36} = \sqrt{5^2 \times 6^2}$

$= \sqrt{(5 \times 6)^2}$, चूँकि हम जानते हैं कि पूर्णांकों a व b के लिए $(a \times b)^2 = a^2 \times b^2$

$= 5 \times 6$

$= \sqrt{25} \times \sqrt{36}$

वस्तुत: पूर्ण वर्ग संख्याओं के लिए निम्न नियम लागू होता है :

निमय 1 : दो पूर्ण वर्ग संख्याओं m व n के लिए,

$$\sqrt{m \times n} = \sqrt{m} \times \sqrt{n}$$

बड़ी संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात करने के लिए यह नियम बहुत सहायक है।

उदाहरण 10 : संख्या 38416 का वर्गमूल निकालिए।

हल : $38416 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$

$= 2^4 \times 7^4$

$\therefore \quad \sqrt{38416} = \sqrt{2^4 \times 7^4}$

$= \sqrt{2^4} \times \sqrt{7^4}$ (नियम 1 के द्वारा)

$= 2^2 \times 7^2$

$= 196$

उदाहरण 11 : $\sqrt{\frac{25}{36}}$ और $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}}$ ज्ञात करें। क्या ये बराबर हैं?

हल : $\sqrt{\frac{25}{36}} = \sqrt{\frac{5^2}{6^2}}$

$= \sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2}$, चूँकि $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}, b \neq 0$

$= \frac{5}{6}$

साथ ही, $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}} = \frac{5}{6}$

अतः, $\sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}}$

उपर्युक्त उदाहरण वास्तव में अग्रलिखित नियम का दृष्टांत है :

नियम 2 : यदि m व n पूर्ण वर्ग संख्याएँ हैं (तथा $n \neq 0$) है, तो

$$\sqrt{\frac{m}{n}} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$$

उदाहरण 12 : $\frac{225}{3136}$ का वर्गमूल ज्ञात कीजिए :

हल : $\sqrt{225} = \sqrt{3 \times 3 \times 5 \times 5}$

$= 3 \times 5 = 15$ और

$\sqrt{3136} = \sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 7}$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 7$

$= 56$

$\therefore \quad \sqrt{\frac{225}{3136}} = \frac{\sqrt{225}}{\sqrt{3136}}$ (नियम 2 द्वारा)

$= \frac{15}{56}$

उदाहरण 13 : निम्नलिखित का वर्गमूल ज्ञात कीजिए :

(i) $4\frac{29}{49}$ (ii) 0.0196

हल : (i) $\sqrt{4\frac{29}{49}} = \sqrt{\frac{225}{49}}$

$= \frac{\sqrt{225}}{\sqrt{49}}$ (नियम 2 द्वारा)

$$= \frac{15}{7} = 2\frac{1}{7}$$

(ii) $$\sqrt{0.0196} = \sqrt{\frac{196}{10000}}$$

$$= \frac{\sqrt{196}}{\sqrt{10000}}$$ (नियम 2 द्वारा)

$$= \frac{\sqrt{2 \times 2 \times 7 \times 7}}{\sqrt{100 \times 100}}$$

$$= \frac{2 \times 7}{100} = 0.14$$

उदाहरण 14 : संख्या $21\frac{2797}{3364}$ का वर्गमूल निकालिए।

हल : $\sqrt{21\frac{2797}{3364}} = \sqrt{\frac{73441}{3364}} = \frac{\sqrt{73441}}{\sqrt{3364}}$ (नियम 2 द्वारा)

अब $\sqrt{73441} = 271$ तथा

$\sqrt{3364} = 58$

अत: $\sqrt{21\frac{2797}{3364}} = \frac{271}{58}$

$= 4\frac{39}{58}$

```
    | 271
----|---------
  2 | 7 34 41
    | 4
 47 | 334
    | 329
541 |   541
    |   541
    |     0
```

```
    | 58
----|------
  5 | 33 64
    | 25
108 |  864
    |  864
    |    0
```

उदाहरण 15 : 37.0881 का वर्गमूल ज्ञात करें।

हल : हम 37.0881 को परिमेय संख्या के रूप में परिवर्तित कर गुणनखंडन अथवा विभाजन विधि द्वारा वर्गमूल ज्ञात करते हैं।

इस प्रकार, $\sqrt{37.0881} = \sqrt{\frac{370881}{10000}}$

लेकिन $\sqrt{370881} = 609$

तथा $\sqrt{10000} = 100$

```
     | 609
-----|----------
   6 | 37 08 81
     | 36
 120 |  108
     |    0
1209 | 10881
     | 10881
     |     0
```

अतः, $\sqrt{37.0881} = \frac{609}{100}$

$= 6.09$

1.9 एक (पूर्ण वर्ग) दशमलव संख्या का वर्गमूल

किसी दशमलव संख्या को परिमेय संख्या के रूप में बदले बिना भी हम इसका वर्गमूल ज्ञात कर सकते हैं। यह प्रक्रिया इस प्रकार की जाती है :

1. दशमलव संख्या के पूर्णांकीय भाग में सामान्य रीति से दंड खींचिए।
2. दशमलव भाग में प्रथम दशमलव स्थान से आरंभ कर अंकों के प्रत्येक युग्म पर दंड लगाइए।
3. अब सामान्य विभाजन विधि से वर्गमूल निकालना आरंभ कीजिए।
4. जैसे ही पूर्णांकीय भाग समाप्त हो, भागफल में दशमलव बिंदु स्थापित कर दीजिए।
5. शून्य शेषफल प्राप्त होते ही प्रक्रिया रोक दीजिए। इस स्थिति में, भागफल ही संख्या का वर्गमूल है।

उदाहरण 16 : 37.0881 का वर्गमूल विभाजन विधि से ज्ञात करें।

हल :

$$\begin{array}{r|l} & 6.09 \\ \hline 6 & \overline{37}.\overline{08}\,\overline{81} \\ & 36 \\ \hline 120 & 108 \\ & 0 \\ \hline 1209 & 10881 \\ & 10881 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$\therefore \quad \sqrt{37.0881} = 6.09$

उदाहरण 17 : 0.000529 का वर्गमूल ज्ञात करें।

हल :

$$\begin{array}{r|l} & 0.023 \\ \hline 2 & \bar{0}.\overline{00}\,\overline{05}\,\overline{29} \\ & 04 \\ \hline 43 & 129 \\ & 129 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$\therefore \qquad \sqrt{0.000529} = 0.023$

टिप्पणी : इस उदाहरण में पूर्णांकीय भाग शून्य है। अत: वर्गमूल का पूर्णांकीय भाग भी शून्य ही होगा। दशमलव बिंदु के बाद पहला युग्म 00 है। अत: वर्गमूल में भी दशमलव बिंदु के बाद पहला अंक शून्य ही होगा। शेष प्रक्रिया सामान्य है।

1.10 विभाजन विधि द्वारा वर्गमूल का सन्निकट मान

हम जानते हैं कि ऐसे दो पूर्णांकों p व q का चयन असंभव है जिनके लिए $p^2 = 2q^2$ या $2 = \frac{p^2}{q^2}$ हो। दूसरे शब्दों में, ऐसी कोई परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ नहीं होती जिसके लिए $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ हो। अर्थात् $\sqrt{2}$ की सटीक परिकलन कर पाना असंभव है। ऐसी स्थिति में जहाँ किसी व्यंजक का सटीक मान ज्ञात करना संभव नहीं होता, हम उसका सन्निकट मान प्राप्त करते हैं। वर्तमान स्थिति में हम कोई ऐसी परिमेय या दशमलव संख्या प्राप्त करने का प्रयास करेंगे जो $\sqrt{2}$ का कोई सन्निकट मान दे।

चूँकि $\quad 1^2 < 2 < 2^2$

अत:, $\quad 1 < \sqrt{2} < 2$

इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि $\sqrt{2}$ का एक परिमेय सन्निकट मान 1 है। अधिक सन्निकट मान प्राप्त करने के लिए, हम 1 तथा 2 के म ध्य स्थित संख्याओं 1.1, 1.2 .....1.9, के वर्गों का परिकलन कर, वर्गों की 2 से तुलना करते हैं।

$$1.1^2 = 1.21 < 2$$
$$1.2^2 = 1.44 < 2$$
$$1.3^2 = 1.69 < 2$$
$$1.4^2 = 1.96 < 2$$
$$1.5^2 = 2.25 > 2$$

अत:, $\quad (1.4)^2 < 2 < (1.5)^2$

अर्थात्, $\quad 1.4 < \sqrt{2} < 1.5$

इस प्रकार, दशमलव संख्या 1.4 को $\sqrt{2}$ का सन्निकट मान लिया जा सकता है। यह मान 1 की अपेक्षा अधिक सन्निकट है। और अधिक सन्निकट मानों के लिए संख्याओं 1.41, 1.42,

..., 1.49, के वर्गों का परिकलन कर तथा 2 से इन वर्गों की तुलना कर हम देख सकते हैं कि

$$1.41 < \sqrt{2} < 1.42$$

इसी प्रक्रिया को आगे बढ़ाकर हम देखते हैं कि

$$1.414 < \sqrt{2} < 1.415$$

यहाँ हम यह भी देखते हैं कि दशमलव के एक स्थान तक $1.4 = \sqrt{2}$, दशमलव के दो स्थान तक $1.41 = \sqrt{2}$, आदि। यह प्रक्रिया जहाँ तक चाहें वहाँ तक बढ़ाई जा सकती है और इस प्रकार $\sqrt{2}$ का मान दशमलव के किसी भी वांछित स्थान तक ज्ञात किया जा सकता है। इस प्रकार के मान प्राप्त करने की एक सुविधाजनक विधि विभाजन की है। इसमें हम वर्गमूल निकालने से पूर्व दशमलव भाग के दाईं ओर आवश्यक शून्य जोड़ लेते हैं। इस विधि को हम उदाहरणों द्वारा स्पष्ट करते हैं।

उदाहरण 18 : दशमलव के दो स्थानों तक $\sqrt{2}$ का शुद्ध मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\sqrt{2}$ का मान दशमलव के दो स्थानों तक शुद्ध निकालने के लिए, हम तीन दशमलव स्थानों वाली ऐसी संख्या ज्ञात करते हैं जो $\sqrt{2}$ का सन्निकट मान दे। इसके लिए हम दशमलव बिंदु के दाईं ओर शून्यों के तीन युग्म, अर्थात् छः शून्य लगाते हैं।

	1.414
1	$\overline{2}.\overline{00}\,\overline{00}\,\overline{00}$
	1
24	100
	96
281	400
	281
2824	11900
	11296
	604

अत: $\sqrt{2}$ = 1.414, दशमलव के तीन स्थानों तक

= 1.41 दशमलव के दो स्थानों तक शुद्ध

इस प्रकार 2 का वांछित वर्गमूल 1.41 है।

उदाहरण 19 : 2.9 का वर्गमूल दशमलव के दो स्थानों तक शुद्ध ज्ञात कीजिए।

हल : पहले हम $\sqrt{2.9}$ का सन्निकट मान तीन दशमलव स्थानों तक ज्ञात करते हैं। इसके लिए दशमलव बिंदु से आगे तीन युग्म बनाने के लिए 9 के बाद पाँच शून्य जोड़ते हैं।

	1.702
1	$\overline{2}.\overline{90}\,\overline{00}\,\overline{00}$
	1
27	190
	189
3402	10000
	6804
	3196

इस प्रकार, $\sqrt{2.9}$ = 1.702, दशमलव के तीन स्थानों तक

= 1.70, दशमलव के दो स्थानों तक शुद्ध

इस प्रकार, वांछित वर्गमूल 1.70 है।

उदाहरण 20 : $11\frac{2}{3}$ का वर्गमूल दशमलव के दो स्थानों तक शुद्ध ज्ञात कीजिए।

हल : $11\frac{2}{3} = 11.666666...$

$= 11.666667$, दशमलव के 6 स्थानों तक शुद्ध

$\therefore \quad \sqrt{11\frac{2}{3}} = \sqrt{11.666667}$

हम निम्न प्रकार वर्गमूल प्राप्त करते हैं :

	3.415
3	$\overline{11}.\overline{66}\,\overline{66}\,\overline{67}$
	9
64	266
	256
681	1066
	681
6825	38567
	34125
	4442

$\therefore \quad \sqrt{11\frac{2}{3}} = 3.415$, दशमलव के 3 स्थानों तक

$= 3.42$, दशमलव के 2 स्थानों तक शुद्ध

टिप्पणी : $\sqrt{11\frac{2}{3}}$ अर्थात् $\sqrt{\frac{35}{3}}$ का मान हम हर को करणीमुक्त कर भी प्राप्त कर सकते हैं।

$$\sqrt{\frac{35}{3}} = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{105}}{3}$$

विभाजन विधि द्वारा,

$\sqrt{105} = 10.246$, दशमलव के 3 स्थानों तक

$\therefore \quad \sqrt{\frac{35}{3}} = \frac{\sqrt{105}}{3} = \frac{10.246}{3}$, दशमलव के 3 स्थानों तक

$= 3.415$, दशमलव के 3 स्थानों तक

$= 3.42$, दशमलव के 2 स्थानों तक शुद्ध

प्रश्नावली 1.5

1. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{361}{625}$ (ii) $\frac{2116}{15129}$

2. वर्गमूल ज्ञात करें:

(i) $\frac{16641}{4489}$ (ii) $\frac{110889}{308025}$

3. निम्नलिखित मिश्रित संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात कीजिए :

(i) $21\frac{51}{169}$ (ii) $10\frac{151}{225}$

4. वर्गमूल ज्ञात कीजिए :

(i) $23\frac{394}{729}$ (ii) $56\frac{569}{1225}$

5. निम्नलिखित दशमलव संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात कीजिए :

(i) 7.29 (ii) 16.81 (iii) 9.3025 (iv) 84.8241

6. वर्गमूल ज्ञात कीजिए :

(i) 0.008281 (ii) 0.053361

7. निम्नलिखित संख्याओं के वर्गमूल दशमलव के दो स्थानों तक शुद्ध ज्ञात कीजिए :

(i) 1.7 (ii) 23.1 (iii) 5 (iv) 20 (v) 0.1

8. निम्नलिखित संख्याओं के वर्गमूल दशमलव के दो स्थानों तक शुद्ध ज्ञात कीजिए :

(i) 0.016 (ii) 0.9 (iii) 7 (iv) $\frac{7}{8}$ (v) $2\frac{1}{12}$

9. निम्नलिखित संख्याओं के वर्गमूल दशमलव के तीन स्थानों तक शुद्ध ज्ञात कीजिए :

(i) 0.00064 (ii) $\frac{5}{12}$ (iii) 2.006 (iv) 1.1

10. निम्नलिखित कथनों के लिए सत्य (T) अथवा असत्य (F) लिखिए :

(i) $\sqrt{0.9} = 0.3$

(ii) यदि a एक प्राकृत संख्या है, तो $\sqrt{a}$ एक परिमेय संख्या है।

(iii) यदि a ऋणात्मक है, तो a^2 भी ऋणात्मक है।

(iv) यदि p व q पूर्ण वर्ग संख्याएँ हैं, तो $\sqrt{\frac{p}{q}}$ एक परिमेय संख्या है।

(v) किसी अभाज्य संख्या का वर्गमूल सन्निकट ही प्राप्त किया जा सकता है, शुद्ध नहीं।

याद रखने योग्य बातें

1. संख्या n एक पूर्ण वर्ग है, यदि किसी पूर्णांक m के लिए $n = m^2$ है।
2. एक पूर्ण वर्ग संख्या कभी भी ऋणात्मक नहीं होती।
3. एक पूर्ण वर्ग संख्या का अंत अंकों 2, 3, 7 या 8 में नहीं होता।
4. किसी पूर्ण वर्ग के अंत में शून्यों की संख्या सदैव सम होती है।
5. सम (विषम) संख्या का वर्ग सम (विषम) संख्या ही होती है।
6. पूर्ण वर्ग संख्या को 3 से भाग देने पर शेषफल 0 (शून्य) अथवा 1 ही बचता है।
7. ऐसी कोई भी दो प्राकृत संख्याएँ p और q नहीं होतीं जिनके लिए $p^2 = 2q^2$ हो।
8. संख्या m, n का वर्गमूल होती है, यदि $n = m \times m = m^2$ हो। n के धनात्मक वर्गमूल को $\sqrt{n}$ लिखते हैं।
9. यदि p व q दो पूर्ण वर्ग संख्याएँ हैं तथा $q \neq 0$ है, तो

   (i) $\sqrt{p \times q} = \sqrt{p} \times \sqrt{q}$ (ii) $\sqrt{\frac{p}{q}} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$
10. एक पूर्ण वर्ग संख्या का वर्गमूल उस वर्ग संख्या के अभाज्य गुणनखंडन द्वारा प्राप्त किया जा सकता है।
11. एक पूर्ण वर्ग संख्या का वर्गमूल विभाजन विधि द्वारा भी ज्ञात किया जा सकता है।
12. विभाजन के लिए युग्म बनाने की प्रक्रिया दशमलव बिंदु से प्रारंभ होती है। पूर्णांकीय भाग के लिए युग्म दाईं ओर से बाईं ओर तथा दशमलव भाग के लिए बाईं ओर से दाईं ओर बनाए जाते हैं।
13. यदि कोई धनात्मक संख्या पूर्ण वर्ग नहीं है, तो इसके वर्गमूल का सन्निकट मान विभाजन विधि द्वारा प्राप्त किया जा सकता है।
14. यदि p व q पूर्ण वर्ग नहीं है, तो $\sqrt{\frac{p}{q}}$ का मान ज्ञात करने के लिए $\frac{p}{q}$ को दशमलव संख्या के रूप में रखकर विभाजन विधि अपनाते हैं।
15. $\sqrt{\frac{p}{q}}$ का मान हर को करणीमुक्त बनाकर भी ज्ञात किया जा सकता है।
16. यदि n एक पूर्ण वर्ग नहीं है, तो $\sqrt{n}$ परिमेय संख्या नहीं हो सकती।

अध्याय

घन एवं घनमूल

2.1 भूमिका

जिस प्रकार अध्याय 1 में हमने वर्ग तथा वर्गमूल के बारे में अध्ययन किया, उसी प्रकार इस अध्याय में हम घन तथा घनमूल के बारे में अध्ययन करेंगे। पहले हम पूर्ण घन संख्याओं के कुछ गुणों की चर्चा करेंगे। फिर हम पूर्ण घन संख्याओं के प्रतिरूपों के बारे में चर्चा करेंगे जिससे हमें छोटी पूर्ण घन संख्याओं का घनमूल ज्ञात करने में सहायता मिलेगी। संख्याओं के इकाई के अंकों तथा उनके घनों के इकाई के अंकों के मध्य जो संबंध होता है उसके आधार पर हम एक पूर्ण घन के घनमूल ज्ञात करने की एक विधि पर चर्चा करेंगे। यह विधि छः अंकों तक की पूर्ण घन संख्याओं का घनमूल ज्ञात करने के लिए उपयुक्त है। इस विधि का लाभ यह है कि इसमें बहुत कम और सरल परिकलन होते हैं। इसके पश्चात् हम अभाज्य गुणनखंडन विधि द्वारा घनमूल ज्ञात करना सीखेंगे। वर्गमूल के समान ही विभाजन द्वारा घनमूल ज्ञात करने की विधि भी होती है, परंतु हम यहाँ उसकी चर्चा नहीं करेंगे। यह विधि थोड़ी कठिन तथा इस पुस्तक के विषय क्षेत्र से बाहर है।

2.2 संख्या का घन व पूर्ण घन संख्याएँ

हम जानते हैं कि यदि x एक शून्येतर संख्या है तो $x \times x \times x$ को, जिसे x^3 के रूप में लिखते हैं, *x का घन (cube)* या केवल *x घन* कहलाता है। इस प्रकार, $8 (= 2 \times 2 \times 2)$, 2 का घन या 2 घन है तथा $27 (= 3 \times 3 \times 3)$, 3 का घन या 3 घन है। सारणी 2.1 में एक अंकीय प्राकृत संख्याओं के घन दिए गए हैं।

सारणी 2.1 : *अंक 1 से 9 तक के घन*

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x^3	1	8	27	64	125	216	343	512	729

1, 8, 27, ..., 729 में से प्रत्येक संख्या किसी न किसी पूर्णांक का घन है। इस प्रकार की संख्याएँ पूर्ण घन (perfect cubes) या पूर्ण तीसरी घात (perfect third powers) कहलाती हैं।

यदि किसी पूर्णांक m के लिए $n = m \times m \times m$ है, तो संख्या n एक पूर्ण घन होती है।

पूर्ण घन संख्याएँ बहुत तीव्रता से बढ़ती हैं। जैसे-जैसे m का मान 1 से 9 तक बढ़ता है, वैसे-वैसे पूर्ण घन संख्या m^3 का मान 1 से 729 तक बढ़ता है। घन संख्याओं का फैलाव बहुत अधिक है। संख्या 100 तक मात्र चार संख्याएँ ही पूर्ण घन हैं। इसी प्रकार, 1000 तक मात्र दस संख्याएँ ही पूर्ण घन हैं (क्या आप इसकी जाँच करना चाहते हैं? नोट करें : $10^3 = 1000$)।

किसी दी हुई संख्या के बारे में हम किस प्रकार ज्ञात करें कि वह पूर्ण घन है अथवा नहीं? अभाज्य संख्या p संख्या m को विभाजित करती है, तो $p \times p \times p$ संख्या $m \times m \times m$ अर्थात् m^3 को विभाजित करेगी। *अतः यदि एक अभाज्य संख्या p किसी पूर्ण घन संख्या को विभाजित करती है, तो p^3 भी उस पूर्ण घन संख्या को विभाजित करेगा।* दूसरे शब्दों में, किसी भी पूर्ण घन संख्या के अभाज्य गुणनखंडन में प्रत्येक अभाज्य संख्या तीन बार अथवा तीन के किसी गुणज बार आती है। उदाहरणार्थ,

$64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2\ (= 2^6)$

$27000 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5\ (= 2^3 \times 3^3 \times 5^3)$

इस प्रकार, किसी संख्या के पूर्ण घन होने या न होने की जाँच करने के लिए, हम उसका अभाज्य गुणनखंडन करते हैं तथा समान अभाज्य गुणनखंडों वाले त्रिकों (तीन-तीन के समूह) में समूहित करते हैं। इस समूहन के पश्चात् यदि कोई गुणनखंड शेष नहीं बचता, तो वह संख्या एक पूर्ण घन होती है। परंतु यदि एक या एक समान दो गुणनखंड शेष बचते हैं, तो वह संख्या पूर्ण घन नहीं होती।

उदाहरण 1 : जाँच कीजिए कि क्या (i) 392 तथा (ii) 106480 पूर्ण घन हैं।

हल : (i) $392 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times 7 \times 7$

यहाँ अभाज्य गुणनखंड 7 त्रिक रूप में समूहित नहीं हैं। अतः, 392 एक पूर्ण घन नहीं है।

(ii) $106480 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times 2 \times 5 \times \underline{11 \times 11 \times 11}$

यहाँ 2 व 5 ऐसे अभाज्य गुणनखंड हैं जो त्रिक रूप में समूहित नहीं हैं। अतः, 106480 एक पूर्ण घन नहीं है।

उदाहरण 2 : जाँच कीजिए कि क्या 53240 एक पूर्ण घन है। यदि नहीं, तो वह छोटी से छोटी (लघुतम) संख्या ज्ञात कीजिए जिससे इस संख्या को गुणा करने पर गुणनफल एक पूर्ण घन प्राप्त हो जाए। वह लघुतम संख्या भी ज्ञात कीजिए जिससे इस संख्या को भाग देने पर भागफल एक पूर्ण घन प्राप्त हो जाए।

हल : $53240 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times 5 \times \underline{11 \times 11 \times 11}$

यहाँ अभाज्य गुणनखंड 5 त्रिक रूप में उपस्थित नहीं है। अत: 53240 एक पूर्ण घन नहीं है। इस संख्या के गुणनखंडन में, 5 एक बार आता है। अत: इस संख्या को 5×5 से गुणा करने पर 5 भी त्रिक रूप में समूहित हो जाता है। अत: $5 \times 5 = 25$ वह लघुतम संख्या है जिससे 53240 को गुणा करने पर गुणनफल एक पूर्ण घन संख्या प्राप्त होती है।

इसी प्रकार, यदि 53240 को 5 से विभाजित कर दिया जाए, तो प्राप्त भागफल का अभाज्य गुणनखंडन त्रिक में समूहित हो जाता है। वस्तुत: $53240 \div 5 = 10648$ $= 2 \times 2 \times 2 \times 11 \times 11 \times 11$ अत: इस स्थिति में अभीष्ट लघुतम संख्या 5 है।

टिप्पणी 1 : सारणी 2.1 के अवलोकन से हमें ज्ञात होता है कि इकाई के अंकों 1, 4, 5, 6 व 9 वाली संख्याओं की संगत घन संख्याओं के इकाई के अंक क्रमश: 1, 4, 5, 6 व 9 ही हैं। अंक 2 व 8 एक ऐसा युग्म बनाते हैं जिसमें अंक 2 का घन अंक 8 पर समाप्त होता है तथा अंक 8 का घन अंक 2 पर समाप्त होता है। अंक 3 व 7 भी इसी प्रकार का युग्म बनाते हैं जिसमें एक अंक का घन दूसरे अंक में समाप्त होता है ($3^3 = 2\underline{7}$, $7^3 = 34\underline{3}$)। हम यह भी जानते हैं कि $10^3 = 1000$। अतः, यदि किसी संख्या के अंत में एक शून्य है, तो उस संख्या के घन के अंत में तीन शून्य होंगे। इन प्रेक्षणों से हमें किसी पूर्ण घन संख्या का घनमूल ज्ञात करने में सहायता मिलेगी।

2. किसी ऋणात्मक संख्या का घन एक ऋणात्मक संख्या होता है। उदाहरणार्थ,

$$(-1)^3 = (-1) \times (-1) \times (-1) = -1 = -1^3$$

$$(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8 = -2^3$$

$$(-5)^3 = -125 = -5^3, \ (-m)^3 = -m^3$$

इस प्रकार, हम देखते हैं कि ऋणात्मक संख्याएँ पूर्ण घन हो सकती हैं। यह तथ्य पूर्ण वर्ग से भिन्न है। हम जानते हैं कि पूर्ण वर्ग *कभी भी ऋणात्मक नहीं* हो सकते।

2.3 दो-अंकीय संख्या का घन निकालना (एक वैकल्पिक विधि)

किसी संख्या का घन संख्या को तीन बार गुणा कर प्राप्त किया जा सकता है। x^3 का मान ज्ञात करने के लिए पहले हम x^2 ज्ञात करते हैं और फिर $x^2 \times x$ । यहाँ हम x^3 ज्ञात करने की एक वैकल्पिक विधि पर चर्चा करेंगे, जहाँ x एक दो-अंकीय संख्या है।

माना $x = ab$ एक दो अंकों वाली संख्या है, जिसमें a दहाई का अंक तथा b इकाई का अंक है। x^2 ज्ञात करने की विधि के समान यहाँ भी हम स्तंभ बनाएँगे। $(ab)^2$ के लिए हमने तीन स्तंभ $a^2 | 2a \times b | b^2$ बनाए थे। $(ab)^3$ के लिए हम चार स्तंभ बनाएँगे। ये चार स्तंभ सर्वसमिका (जिसे हम अध्याय 6 में पढ़ेंगे)

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3.$$

में प्रयुक्त चार पदों $a^3, 3a^2b, 3ab^2$ व b^3 के संगत होते हैं। शेष विधि वही है जो वर्ग के लिए प्रयुक्त होती है, अर्थात् योग करने के बाद स्तंभों में इकाई के अंक को रखते हैं तथा दहाई व अन्य अंकों को बाईं ओर के अगले स्तंभ में जोड़ देते हैं। उदाहरणों की सहायता से, हम इस विधि को स्पष्ट करेंगे।

उदाहरण 3 : वैकल्पिक विधि द्वारा 42^3 ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $a = 4$ तथा $b = 2$ है। अतः, चार स्तंभ है :

a^3	$3a^2 \times b$	$3a \times b^2$	b^3
4^3	$3 \times 4^2 \times 2$	$3 \times 4 \times 2^2$	2^3
$= 64$	$= 96$	$= 48$	$= 8$
$+ 10$	$+ 4$		
74	100		
74	0	8	8

$\therefore \quad 42^3 = 74088$

उदाहरण 4 : वैकल्पिक विधि से 87^3 ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $a = 8$ तथा $b = 7$ है। इस स्थिति में, जब a व b के मान छोटे न हों, तो $3a^2 \times b$ व $3a \times b^2$ के परिकलन तुरंत नहीं हो पाएँगे। इस स्थिति में, हम कार्य पद्धति का निम्न प्रकार सरलीकरण कर सकते हैं :

a^2	a^2	b^2	b^2
a	$3b$	$3a$	b
a^3	$3a^2 \times b$	$3a \times b^2$	b^3

, अर्थात्

64	64	49	49
×8	×21	×24	×7
512	1344	1176	343
+146	+121	+ 34	
658	1465	1210	
658	5	0	3

$\therefore \quad 87^3 = 658503$

उदाहरण 5 : वैकल्पिक विधि से निम्न संख्याओं के घन ज्ञात कीजिए :

(i) 27 (ii) 45 (iii) 81

हल :(i) 27^3 के लिए, हम प्राप्त करते हैं :

4	4	49	49
2	21	6	7
8	84	294	343
+11	+32	+ 34	
19	116	328	
19	6	8	3

$\therefore \quad 27^3 = 19683$

(ii) 45^3 के लिए, हम प्राप्त करते हैं :

16	16	25	25
4	15	12	5
64	240	300	125
+27	+ 31	+ 12	
91	271	312	
91	1	2	5

$\therefore \quad 45^3 = 91125$

(iii) 81^3 के लिए, हम प्राप्त करते हैं :

64	64	1	1
8	3	24	1
512	192	24	1
+19	+2		
531	194		
531	4	4	1

∴ $81^3 = 531441$

प्रश्नावली 2.1

1. निम्न संख्याओं में से प्रत्येक के घन का इकाई का अंक लिखिए :

   31, 109, 388, 833, 4276, 5922, 77774, 44447, 125125125

2. निम्न संख्याओं के घन ज्ञात कीजिए :

   (i) 35 (ii) 56 (iii) 72 (iv) 402 (v) 650 (vi) 819

3. वैकल्पिक विधि द्वारा निम्न संख्याओं के घन ज्ञात कीजिए :

   (i) 35 (ii) 56 (iii) 72

4. निम्न संख्याओं में कौन सी संख्याएँ पूर्ण घन नहीं हैं?

   (i) 64 (ii) 216 (iii) 243 (iv) 1728

5. उपर्युक्त प्रश्न 4 में, जो संख्या पूर्ण घन नहीं है उसके लिए वह लघुतम संख्या ज्ञात कीजिए जिससे गुणा करने पर गुणनफल एक पूर्ण घन प्राप्त हो जाए।

6. उपर्युक्त प्रश्न 4 में, जो संख्या पूर्ण घन नहीं है उसके लिए वह लघुतम संख्या ज्ञात कीजिए जिससे विभाजित करने पर भागफल एक पूर्ण घन प्राप्त हो जाए।

7. संख्या n के तीन भिन्न मानों के लिए निम्न कथनों को सत्यापित करें :

   (i) यदि n एक सम संख्या है, तो n^3 भी एक सम संख्या है।

   (ii) यदि n एक विषम संख्या है, तो n^3 भी एक विषम संख्या है।

(iii) यदि n को 3 से विभाजित करने पर 1 शेष बचता है, तो n^3 को 3 से विभाजित करने पर भी 1 ही शेष बचता है।

(iv) यदि प्राकृत संख्या n का स्वरूप $3p + 2$ के प्रकार का है, तो n^3 भी इसी स्वरूप की संख्या है।

8. निम्न कथनों के लिए सत्य (T) अथवा असत्य (F) लिखें :

(i) 392 एक पूर्ण घन संख्या है।

(ii) 8640 एक पूर्ण घन संख्या नहीं है।

(iii) किसी पूर्ण घन संख्या के अंत में मात्र दो शून्य नहीं हो सकते।

(iv) ऐसी कोई पूर्ण घन संख्या नहीं होती जिसका इकाई का अंक 4 है।

(v) किसी पूर्णांक a के लिए, a^3 सदैव a^2 से बड़ा होता है।

(vi) यदि पूर्णांकों a व b के लिए, $a^2 > b^2$ हो, तो $a^3 > b^3$ भी सत्य होगा।

(vii) यदि a, संख्या b को विभाजित करती है, तो a^3 भी संख्या b^3 को विभाजित करेगी।

(viii) यदि a^2 का इकाई का अंक 9 हो, तो a^3 का इकाई का अंक 7 होता है।

(ix) यदि a^2 का अंतिम अंक 5 है, तो a^3 के अंत में 25 होगा।

(x) यदि a^2 के अंत में शून्यों की संख्या सम है, तो a^3 के अंत में शून्यों की संख्या विषम होगी।

2.4 घनमूल

यदि n एक पूर्ण घन है, तो किसी पूर्णांक m के लिए, $n = m^3$ होता है। यह पूर्णांक m पूर्ण घन n का *घनमूल (cube root)* कहलाता है। इस प्रकार, संख्या m, संख्या n का घनमूल है, यदि $m^3 = n$ हो। उदाहरणार्थ,

2 संख्या 8 का घनमूल है, क्योंकि $2^3 = 8$ है।

5 संख्या 125 का घनमूल है, क्योंकि $5^3 = 125$ है।

11 संख्या 1331 का घनमूल है, क्योंकि $11^3 = 1331$ है।

यदि m, संख्या n का घनमूल है, तो हम लिखेंगे $m = \sqrt[3]{n}$ ।

इस प्रकार $2 = \sqrt[3]{8}, 5 = \sqrt[3]{125}$ तथा $11 = \sqrt[3]{1331}$

सारणी 2.2 में, 1000 तक की पूर्ण घन संख्याएँ तथा सारणी 2.3 में, इन संख्याओं के घनमूल दिए गए हैं।

सारणी 2.2

m	m^3
1	1
2	8
3	27
4	64
5	125
6	216
7	343
8	512
9	729
10	1000

सारणी 2.3

n	$\sqrt[3]{n}$
1	1
8	2
27	3
64	4
125	5
216	6
343	7
512	8
729	9
1000	10

टिप्पणी: घनमूल प्रदर्शित करने के लिए, हम चिह्न '$\sqrt[3]{\ }$' का प्रयोग उसी प्रकार करते हैं जिस प्रकार वर्गमूल के लिए चिह्न '$\sqrt[2]{\ }$' का प्रयोग करते हैं। वर्गमूल के लिए 2 का लोप कर चिह्न '$\sqrt{\ }$' का प्रयोग मात्र सुविधा के लिए किया जाता है। सही अर्थों में हमें '$\sqrt[2]{\ }$' ही लिखना चाहिए। घनमूल लिखने के लिए हम सदैव '$\sqrt[3]{\ }$' का ही प्रयोग करेंगे तथा कभी भी 3 का लोप नहीं करेंगे।

अब हम घनमूल निकालने की कुछ विधियों का वर्णन करेंगे।

2.5 प्रतिरूप द्वारा घनमूल ज्ञात करना

प्राकृत संख्याओं के वर्गों के समान पूर्ण घन संख्याओं के भी कुछ रुचिकर प्रतिरूप होते हैं:

$1^3 = 1 \quad \therefore \quad 1^3 - 0^3 = 1 \quad = 1 + 0 \times 6 = 1 + 1 \times 0 \times 3$

$2^3 = 8 \quad \therefore \quad 2^3 - 1^3 = 7 \quad = 1 + 1 \times 6 = 1 + 2 \times 1 \times 3$

$3^3 = 27 \quad \therefore \quad 3^3 - 2^3 = 19 = 1 + 1 \times 6 + 2 \times 6 = 1 + 3 \times 2 \times 3$

$4^3 = 64 \quad \therefore \quad 4^3 - 3^3 = 37 = 1 + 1 \times 6 + 2 \times 6 + 3 \times 6 = 1 + 4 \times 3 \times 3$

.
.
.

$9^3 = 729 \quad \therefore \quad 9^3 - 8^3 = 217 = 1 + 1 \times 6 + 2 \times 6 + \ldots + 8 \times 6$

$= 1 + 9 \times 8 \times 3$

साथ ही, $1 = 1^3$

$1 + 7 = 2^3$

$1 + 7 + 19 = 3^3$

$1 + 7 + 19 + 37 = 4^3$

.
.
.

$1 + 7 + 19 + \ldots + 217 = 9^3$

ध्यान दीजिए कि 2^3 संख्या क्रम 1, 7, 19, 37, ... में से पहली दो संख्याओं का योग है। इसी प्रकार, $3^3, 4^3, \ldots, 9^3$ इसी संख्या क्रम के क्रमशः पहली तीन, चार, ..., नौ संख्याओं के योग हैं। ये संख्याएँ $1 + n \times (n-1) \times 3$ में $n = 1, 2, 3, \ldots$ रख कर प्राप्त की जा सकती है।

इस प्रकार, किसी पूर्ण घन संख्या का घनमूल ज्ञात करने के लिए, हम उस संख्या में से $1 \, (= 1 + 1 \times 0 \times 3), 7 \, (= 1 + 2 \times 1 \times 3), 19 \, (= 1 + 3 \times 2 \times 3), 37 \, (= 1 + 4 \times 3 \times 3)$, आदि क्रमवार घटाते हैं। जितनी बार घटाने पर शून्य प्राप्त हो जाता है वही उस पूर्ण घन संख्या का घनमूल होता है। उदाहरणार्थ,

$$216 - 1 = 215, \; 215 - 7 = 208, \; 208 - 19 = 189,$$

$$189 - 37 = 152, \; 152 - 61 = 91, \; 91 - 91 = 0$$

यहाँ शून्य प्राप्त होने तक छः बार घटाया गया है। अतः, $\sqrt[3]{216} = 6$ है।

छोटी संख्याओं का घनमूल ज्ञात करने के लिए, इस विधि का प्रयोग किया जा सकता है। इस विधि द्वारा वह लघुतम संख्या भी ज्ञात की जा सकती है जिसे किसी पूर्ण घनेतर संख्या में जोड़ने अथवा घटाने से एक पूर्ण घन संख्या प्राप्त हो जाए।

उदाहरण 6 : क्या 400 एक पूर्ण घन संख्या है? यदि नहीं, तो वह लघुतम संख्या ज्ञात कीजिए जिसे 400 में से घटाने पर एक पूर्ण घन प्राप्त हो जाए।

हल : $400 - 1 = 399, 399 - 7 = 392, 392 - 19 = 373, 373 - 37 = 336,$
$336 - 61 = 275, 275 - 91 = 184, 184 - 127 = 57$

घटाने के लिए अनुक्रम में अगली संख्या 169 है जो 57 से बड़ी है। इस प्रकार घटाने की इस प्रक्रिया में शून्य प्राप्त नहीं होता। अत: 400 पूर्ण घन नहीं है। यदि 400 में से 57 घटा दिया जाए, तो सात बार घटाने पर शून्य प्राप्त होगा। इस प्रकार, $400 - 57 = 7^3$। अत:, अभीष्ट संख्या 57 (तथा 343 परिणामी पूर्ण घन) है।

इसी प्रकार, यदि 400 में 112 जोड़ दिया जाए, तो प्राप्त योग 512 एक पूर्ण घन है। (क्यों?)

2.6 इकाई के अंक द्वारा घनमूल ज्ञात करना

अब हम एक विधि बताएँगे जिसके द्वारा छः अंकों तक की किसी भी पूर्ण घन संख्या का घनमूल ज्ञात किया जा सकता है। सारणी 2.2 के अवलोकन से हमें ज्ञात होता है कि 0, 1, 4, 5, 6 व 9 पर समाप्त होने वाली संख्याओं के घन भी क्रमशः 0, 1, 4, 5, 6 व 9 पर समाप्त होते हैं। परंतु 2 पर समाप्त होने वाली संख्या का घन 8 पर तथा 8 पर समाप्त होने वाली संख्या का घन 2 पर समाप्त होता है। इसी प्रकार, 3 या 7 पर समाप्त होने वाली संख्याओं का अंत क्रमश: 7 या 3 पर होता है। अत: किसी पूर्ण घन संख्या के इकाई के अंक से घनमूल संख्या का इकाई का अंक ज्ञात किया जा सकता है।

एक 6 अंकों तक की कोई पूर्ण घन संख्या लें। इस संख्या के घनमूल में अधिकतम दो अंक होंगे, क्योंकि 7 अंकों की लघुतम संख्या 1000000 का घनमूल 100 है, जो कि तीन अंकों की लघुतम संख्या है। हम घनमूल के दोनों अंक निम्न चरणों में प्राप्त करते हैं:

चरण 1 : पूर्ण घन संख्या के इकाई के अंक को देखकर घनमूल संख्या का इकाई का अंक प्राप्त करें जैसा कि ऊपर बताया जा चुका है।

चरण 2 : संख्या के दाईं ओर के तीन (अर्थात्, इकाई, दहाई व सैकड़ा) अंकों को काट दें। यदि कोई संख्या शेष नहीं बचती है, तो चरण 1 में प्राप्त अंक ही अभीष्ट घनमूल है।

चरण 3 : चरण 2 के पश्चात् बची संख्या पर विचार करें। वह अधिकतम एक-अंकीय संख्या ज्ञात कीजिए जिसका घन बची हुई संख्या के बराबर या उससे छोटा हो। यह अंक घनमूल के दहाई का अंक है।

उदाहरण 7 : निम्न के घनमूल ज्ञात कीजिए :

(i) 512 (ii) 2197 (iii) 117649 (iv) 636056

हल: (i) 512: यहाँ इकाई का अंक 2 है। अतः, इस संख्या के घनमूल के इकाई का अंक 8 होगा। चूँकि इस संख्या के इकाई, दहाई व सैकड़े के अंकों को काट देने पर कुछ शेष नहीं बचता, अतः, अभीष्ट घनमूल 8 है।

(ii) 2197 : यहाँ इकाई का अंक 7 है। अतः, घनमूल का इकाई का अंक 3 है। दाईं ओर से तीन अंक काट देने पर, संख्या 2 शेष बचती है। वह संख्या जिसका घन 2 से छोटा है, 1 है। अतः, घनमूल का दहाई का अंक 1 है। इस प्रकार, अभीष्ट घनमूल 13 है।

(iii) 117649 : यहाँ इकाई का अंक 9 है। अतः, घनमूल का इकाई का अंक भी 9 है। दाईं ओर से तीन अंक काटने पर, संख्या 117 बचती है। चूँकि $4^3 = 64 < 117$ है तथा $5^3 = 125 > 117$ है, अतः घनमूल का दहाई का अंक 4 है। इस प्रकार, अभीष्ट घनमूल 49 है।

(iv) 636056 : यहाँ घनमूल का इकाई का अंक 6 है। (क्यों?) साथ ही, $8^3 < 636$ व $9^3 > 636$ अतः, घनमूल का दहाई का अंक 8 है।

$\therefore \quad \sqrt[3]{636056} = 86$

2.7 अभाज्य गुणनखंडन द्वारा घनमूल

हम जानते हैं कि पूर्ण घन संख्या के गुणनखंडन में प्रत्येक अभाज्य गुणनखंड तीन बार या तीन का कोई गुणज बार उपस्थित होता है। अतः, किसी संख्या n का घनमूल $\sqrt[3]{n}$ निम्न विधि से ज्ञात किया जा सकता है:

1. संख्या n के अभाज्य गुणनखंडन ज्ञात कीजिए।
2. समान गुणनखंडों को त्रिकों में समूहित कीजिए।
3. यदि कुछ अभाज्य गुणनखंड असमूहित रहते हैं, तो संख्या n पूर्ण घन नहीं है। अतः $\sqrt[3]{n}$ प्राप्त नहीं किया जा सकता। इस प्रकार, यह प्रक्रिया यहीं रुक जाती है।

4. यदि कोई भी गुणनखंड असमूहित नहीं बचता, तो प्रत्येक त्रिक समूह से एक गुणनखंड लेकर सबको गुणा करते हैं।

   यह गुणनफल ही n का वांछित घनमूल है।

उदाहरण 8 : घनमूल ज्ञात कीजिए :

(i) 91125 (ii) 531441 (iii) 551368

हल : (i) $91125 = \underline{5 \times 5 \times 5} \times \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{3 \times 3 \times 3}$

$\therefore \quad \sqrt[3]{91125} = 5 \times 3 \times 3 = 45$

5	91125
5	18225
5	3645
3	729
3	243
3	81
3	27
3	9
	3

(ii) $531441 = \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{3 \times 3 \times 3}$

$\therefore \quad \sqrt[3]{531441} = 3 \times 3 \times 3 \times 3$

$= 81$

3	531441
3	177147
3	59049
3	19683
3	6561
3	2187
3	729
3	243
3	81
3	27
3	9
	3

(iii) $551368 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{41 \times 41 \times 41}$

$\therefore \quad \sqrt[3]{551368} = 2 \times 41$

$= 82$

2	551368
2	275684
2	137842
41	68921
41	1681
	41

2.8 ऋणात्मक संख्याओं का घनमूल

दो पूर्ण घन संख्याओं $27\ (=3^3)$ व $343\ (=7^3)$ पर विचार करें। हम जानते हैं कि $27 \times 343 = 9261$ भी एक पूर्ण घन संख्या है, क्योंकि पूर्णांकों a व b के लिए संबंध '

$$a^3 \times b^3 = (a \times b)^3$$

सत्य होता है। 9261 का घनमूल ज्ञात करने पर, हम देखते हैं कि

$$\sqrt[3]{9261} = 21 = 3 \times 7 = \sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{343}$$

अर्थात् $$\sqrt[3]{27 \times 343} = \sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{343}$$

इस संबंध में 27 या 343 की कोई विशेष बात नहीं है। वस्तुत: यदि x व y दो पूर्ण घन संख्याएँ हैं, तो संबंध

$$\sqrt[3]{x \times y} = \sqrt[3]{x} \times \sqrt[3]{y}$$

सदैव सत्य होता है। अर्थात्

दो पूर्ण घन संख्याओं के गुणनफल का घनमूल उन संख्याओं के घनमूलों के गुणनफल के बराबर होता है।

उपरोक्त नियम का प्रयोग कर हम ऋणात्मक पूर्णांकों का घनमूल ज्ञात करते हैं। किसी भी धनात्मक पूर्णांक m के लिए

$$-m = -1 \times m$$

$\therefore$ $$\sqrt[3]{-m} = \sqrt[3]{-1} \times \sqrt[3]{m}$$

परंतु, $\sqrt[3]{-1} = -1$, क्योंकि $(-1)^3 = -1$ है।

$\therefore$ $$\sqrt[3]{-m} = -\sqrt[3]{m}$$

उदाहरण 9 : घनमूल ज्ञात कीजिए : (i) -125 (ii) -343 (iii) -2197

हल : (i) $\sqrt[3]{-125} = -\sqrt[3]{125} = -5$ $(\because 5^3 = 125)$

(ii) $\sqrt[3]{-343} = -\sqrt[3]{343} = -7$ $(\because 7^3 = 343)$

(iii) $\sqrt[3]{-2197} = -\sqrt[3]{2197} = -13$ $(\because 13^3 = 2197)$

2.9 परिमेय संख्याओं का घनमूल

दो पूर्ण घन संख्याओं के गुणनफल के घनमूल के समान ही पूर्ण घन संख्याओं के भागफल के घनमूल के लिए भी हमें निम्न परिणाम प्राप्त हैं :

यदि x तथा $y (\neq 0)$ दो पूर्ण घन संख्याएँ हैं, तो $\sqrt[3]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}}$ होता है। अर्थात्

दो पूर्ण घन संख्याओं के भागफल का घनमूल उन संख्याओं के घनमूलों के भागफल के बराबर होता है।

ध्यान दीजिए कि $\sqrt[3]{x}$ तथा $\sqrt[3]{y}$ पूर्णांक हैं तथा $\sqrt[3]{y} \neq 0$ है। अतः, $\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}}$ एक परिमेय संख्या है। इस प्रकार, उस परिमेय संख्या का घनमूल, जिसके अंश व हर दोनों पूर्ण घन हैं, एक परिमेय संख्या है। इस परिमेय संख्या का अंश दी हुई संख्या के अंश का घनमूल तथा हर दी हुई संख्या के हर का घनमूल होता है।

उदाहरण 10 : घनमूल ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{343}{125}$ (ii) $\frac{-27}{512}$ (iii) $\frac{-2197}{1331}$

हल : (i) $\sqrt[3]{\frac{343}{125}} = \frac{\sqrt[3]{343}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{\sqrt[3]{7 \times 7 \times 7}}{\sqrt[3]{5 \times 5 \times 5}} = \frac{7}{5}$

(ii) $\sqrt[3]{\frac{-27}{512}} = \frac{\sqrt[3]{-27}}{\sqrt[3]{512}} = \frac{-\sqrt[3]{3 \times 3 \times 3}}{\sqrt[3]{8 \times 8 \times 8}} = \frac{-3}{8} = -\frac{3}{8}$

(iii) $\sqrt[3]{\frac{-2197}{1331}} = \frac{-\sqrt[3]{2197}}{\sqrt[3]{1331}} = \frac{-\sqrt[3]{13 \times 13 \times 13}}{\sqrt[3]{11 \times 11 \times 11}} = \frac{-13}{11} = -\frac{13}{11}$

प्रश्नावली 2.2

1. अनुक्रम 1, 7, 19, 37, 61, 91, 127, 169, 217, 271, 331, 397, ... के पदों को क्रमित रूप से घटा कर निम्नलिखित संख्याओं के घनमूल ज्ञात कीजिए :

   (i) 64 (ii) 512 (iii) 1728

2. प्रश्न 1 की विधि द्वारा निम्न संख्याओं के पूर्ण घन होने की जाँच कीजिए :

   (i) 130 (ii) 345 (iii) 792 (iv) 1331

3. प्रश्न 2 में दी गई उन संख्याओं के लिए, जो पूर्ण घन नहीं है, वे लघुतम संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिन्हें उनमें से घटाने पर प्राप्त संख्याएँ पूर्ण घन हो जाएँ। संगत घनमूल भी ज्ञात कीजिए।

4. निम्न संख्याओं के घनमूलों के इकाई के अंक ज्ञात कीजिए :

   (i) 226981 (ii) 13824 (iii) 571787 (iv) 175616

5. प्रश्न 4 में दी गई संख्याओं के घनमूलों के दहाई के अंक ज्ञात कीजिए।

6. इकाई व दहाई के अंकों को ज्ञात कर, निम्न संख्याओं के घनमूल ज्ञात कीजिए :

   (i) 389017 (ii) 91125 (iii) 110592 (iv) 46656

7. अभाज्य गुणनखंडन विधि द्वारा निम्न संख्याओं के घनमूल ज्ञात कीजिए :

   (i) 250047 (ii) 438976 (iii) 592704 (iv) 614125

8. घनमूल ज्ञात कीजिए:

   (i) –226981 (ii) – 13824 (iii) – 571787 (iv) – 175616

9. निम्न तथ्यों के आधार पर 2460375, 20346417, 210644875, 57066625 संख्याओं के घनमूल ज्ञात कीजिए :

   (i) $2460375 = 3375 \times 729$

   (ii) $20346417 = 9261 \times 2197$

   (iii) $210644875 = 42875 \times 4913$

   (iv) $57066625 = 166375 \times 343$

   [*संकेत* : $a^3 b^3 = (ab)^3$]

10 घनमूल ज्ञात कीजिए :

   (i) $\frac{729}{2197}$ (ii) $\frac{3375}{4913}$ (iii) $\frac{9261}{42875}$ (iv) $\frac{343}{166375}$

11. जाँच कीजिए कि क्या निम्न संख्याओं में से प्रत्येक का घनमूल ज्ञात किया जा सकता है। यदि नहीं, तो वह लघुतम संख्या ज्ञात कीजिए जिससे गुणा करने पर गुणनफल का घनमूल ज्ञात किया जा सके।

    (i) 3087 (ii) 33275 (iii) 120393

12. वह लघुतम संख्या ज्ञात कीजिए जिससे प्रश्न 11 की संख्याओं को भाग देने पर भागफल का घनमूल ज्ञात किया जा सके।

याद रखने योग्य बातें

1. संख्या n एक पूर्ण घन होती है, यदि किसी पूर्णांक m के लिए, $n = m^3$ हो।
2. यदि n एक पूर्ण घन संख्या है तथा $n = m^3$ है, तो m को n का घनमूल कहते हैं। n के घनमूल को $\sqrt[3]{n}$ से प्रदर्शित करते हैं।
3. किसी पूर्ण घन के घनमूल के इकाई का अंक उस पूर्ण घन के इकाई के अंक को देखकर निर्धारित किया जा सकता है।
4. अभाज्य गुणनखंडन द्वारा किसी भी पूर्ण घन का घनमूल ज्ञात किया जा सकता है।
5. दो पूर्ण घनों के गुणनफल का घनमूल उन पूर्ण घनों के घनमूलों के गुणनफल के बराबर होता है। अर्थात्

$$\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} . \sqrt[3]{b}$$

जहाँ a व b पूर्ण घन संख्याएँ हैं।

6. दो पूर्ण घन संख्याओं के भागफल का घनमूल उन पूर्ण घन संख्याओं के घनमूलों के भागफल के बराबर होता है, अर्थात्

$$\sqrt[3]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}},\ b \neq 0$$

जहाँ a व b पूर्ण घन संख्याएँ हैं।

7. एक ऋणात्मक पूर्ण घन संख्या का घनमूल ऋणात्मक होता है।

अध्याय

3

परिमेय घातांक एवं करणियाँ

3.1 भूमिका

याद कीजिए कि यदि x एक परिमेय संख्या, तथा m एक धनात्मक पूर्णांक है, तो

$$x^m = x \times x \times \ldots \times x,\ m \text{ बार}$$

इसी प्रकार, यदि x कोई शून्येतर परिमेय संख्या है तथा k एक ऋणात्मक पूर्णांकीय घातांक है, जहाँ $k = -m$ (m एक धनात्मक पूर्णांक) है, तो

$$x^k = x^{-m} = x^{-1} \times x^{-1} \times \ldots \times x^{-1},\ m \text{ बार}$$

$$= \frac{1}{x} \times \frac{1}{x} \times \ldots \times \frac{1}{x},\ m \text{ बार}$$

$$= \left(\frac{1}{x}\right)^m = \frac{1}{x^m}$$

हम यह भी जानते हैं कि यदि $x \neq 0$ एक परिमेय संख्या है तथा m व n पूर्णांक हैं, तो

$$x^m \times x^n = x^{m+n}$$

$$x^m \div x^n = x^{m-n}$$

$$(x^m)^n = x^{m \times n}$$

साथ ही, $x^m y^m = (xy)^m$ (जहाँ x, y शून्येतर परिमेय संख्याएँ हैं)

परंतु क्या हम किसी परिमेय संख्या x के लिए $x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{5}{4}}, x^{\frac{-9}{13}}$ जैसे व्यंजकों का अर्थ जानते हैं, जहाँ घातांक भी परिमेय संख्याएँ हैं? इस अध्याय में, हम x^m का अर्थ जानेंगे, जहाँ x एक धनात्मक परिमेय संख्या है तथा m एक परिमेय घातांक है। हम पूर्णांकीय घातांकों के स्थान पर परिमेय घातांकों के लिए भी ऊपर जैसे संबंध प्राप्त करेंगे।

3.2 धनात्मक परिमेय घातांक

हम जानते हैं कि $3^3 = 27$ है। इस संबंध को हम $27^{\frac{1}{3}} = 3$ की भाँति भी व्यक्त करते हैं। इसी प्रकार, संबंध $2^5 = 32$ को $32^{\frac{1}{5}} = 2$ भी लिखा जा सकता है। व्यापक रूप में, यदि x व y दो शून्येतर परिमेय संख्याएँ हैं और किसी धनात्मक पूर्णांक m के लिए $x^m = y$ हो, तो हम इसे $y^{\frac{1}{m}} = x$ भी लिख सकते हैं। $y^{\frac{1}{m}}$ को हम $\sqrt[m]{y}$ भी लिख सकते हैं और $\sqrt[m]{y}$ को हम y *का* m*वाँ मूल* (m^{th} *root*) कहते हैं। इस प्रकार,

$$4 \text{ का दूसरा मूल} = \sqrt[2]{4} = 2$$

$$27 \text{ का तीसरा मूल} = \sqrt[3]{27} = 3$$

$$625 \text{ का चौथा मूल} = \sqrt[4]{625} = 5 \text{ आदि।}$$

इस अर्थ में हम x^m को किसी भी धनात्मक परिमेय घातांक m के लिए परिभाषित कर सकते हैं।

यदि x एक धनात्मक परिमेय संख्या है, तथा $m = \frac{p}{q}$ एक धनात्मक परिमेय घातांक है, तो $x^{\frac{p}{q}}$ को हम x^p के q वें मूल के रूप में परिभाषित करते हैं।

अर्थात् $\quad x^{\frac{p}{q}} = \left(x^p\right)^{\frac{1}{q}}$

उदाहरण के लिए,

$$8^{\frac{5}{3}} = \left(8^5\right)^{\frac{1}{3}} = (32768)^{\frac{1}{3}} = 32$$

साथ ही, $\quad \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^5 = 2^5 = 32$

अतः, $\quad \left(8^5\right)^{\frac{1}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^5.$

यहाँ 8, 3 या 5 कोई विशेष अंक नहीं हैं। यह संबंध व्यापक रूप से सत्य है।

यदि x एक धनात्मक परिमेय संख्या है, तो किसी भी धनात्मक परिमेय घातांक $\frac{p}{q}$ के लिए,

$$\left(x^p\right)^{\frac{1}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$$

इस प्रकार, हम $x^{\frac{p}{q}}$ को निम्नलिखित दो समतुल्य रूपों में परिभाषित कर सकते हैं।

(A): $x^{\frac{p}{q}} = \left(x^p\right)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$, इसे x^p का q वाँ मूल या x की *घात p का q वाँ मूल* पढ़ा जाता है।

(B): $x^{\frac{p}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p$, इसे x *के q वें मूल की घात p* पढ़ा जाता है।

उदाहरण 1 : ज्ञात कीजिए : (i) $8^{\frac{2}{3}}$ (ii) $\left(\frac{32}{243}\right)^{\frac{4}{5}}$

हल : (i) $8^{\frac{2}{3}} = \left(8^2\right)^{\frac{1}{3}}$, रूप (A) के प्रयोग द्वारा

$= (64)^{\frac{1}{3}}$

$= 4$, क्योंकि $4^3 = 64$

या

$8^{\frac{2}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2$, रूप (B) के प्रयोग द्वारा

$= (2)^2$, क्योंकि $2^3 = 8$

$= 4$

(ii) $\left(\frac{32}{243}\right)^{\frac{4}{5}} = \left[\left(\frac{32}{243}\right)^4\right]^{\frac{1}{5}}$, रूप (A) के प्रयोग द्वारा

$= \left[\left(\frac{2^5}{3^5}\right)^4\right]^{\frac{1}{5}}$, चूँकि $32 = 2^5,\ 243 = 3^5$

$= \left[\frac{\left(2^5\right)^4}{\left(3^5\right)^4}\right]^{\frac{1}{5}}$, $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ के प्रयोग द्वारा

$$=\left(\frac{2^{20}}{3^{20}}\right)^{\frac{1}{5}}, \quad (x^m)^n = x^{mn} \text{ के प्रयोग द्वारा}$$

$$=\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{20}\right]^{\frac{1}{5}}, \quad \frac{x^m}{y^m} = \left(\frac{x}{y}\right)^m \text{ के प्रयोग द्वारा}$$

$$=\left(\frac{2}{3}\right)^4, \text{ चूँकि } \left(\left(\frac{2}{3}\right)^4\right)^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^{20}$$

$$=\frac{16}{81}$$

या

$$\left(\frac{32}{243}\right)^{\frac{4}{5}} = \left[\left(\frac{32}{243}\right)^{\frac{1}{5}}\right]^4, \text{ रूप (B) के प्रयोग द्वारा}$$

$$= \left(\left[\left(\frac{2}{3}\right)^5\right]^{\frac{1}{5}}\right)^4$$

$$=\left(\frac{2}{3}\right)^4, \quad \left(x^m\right)^{\frac{1}{m}} = x,\ x > 0 \text{ के प्रयोग द्वारा}$$

$$=\frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$$

टिप्पणी : उपर्युक्त उदाहरण में, हमने (A) व (B) दोनों रूपों का प्रयोग किया है। आपके विचार से परिकलन के लिए कौन सा रूप अधिक सुविधाजनक है?

उदाहरण 2 : मान ज्ञात कीजिए : (i) $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{3}{4}} \times \left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{5}{4}}$ (ii) $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{3}{4}+\frac{5}{4}}$

हल : (i) $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{3}{4}} \times \left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{5}{4}} = \left[\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^3 \times \left[\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^5$, रूप (B) का प्रयोग करने पर

$$=\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^5, \text{ चूँकि } \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^8, \text{ क्योंकि पूर्णांकों } m \text{ व } n \text{ के लिए, } x^m \times x^n = x^{m+n}$$

$$= \frac{2^8}{3^8} = \frac{256}{6561}$$

(ii) $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{3}{4}+\frac{5}{4}} = \left(\frac{16}{81}\right)^2$, क्योंकि $\frac{3}{4} + \frac{5}{4} = 2$

$$= \frac{16^2}{81^2} = \frac{256}{6561}$$

टिप्पणी : उपर्युक्त उदाहरण में, हमने देखा कि

$$\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{3}{4}} \times \left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{5}{4}} = \left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{3}{4}+\frac{5}{4}}$$

यह संबंध, घातांकों के नियम $x^m \times x^n = x^{m+n}$ का पालन करता है।

उदाहरण 3 : मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{5}{4}} \div \left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{3}{4}}$ (ii) $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{5}{4}-\frac{3}{4}}$

हल : (i) $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{5}{4}} \div \left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{3}{4}} = \left[\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^5 \div \left[\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^3$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^5 \div \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^2, \text{ क्योंकि पूर्णांकों } m \text{ व } n \text{ के लिए, } x^m \div x^n = x^{m-n}$$

$$= \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$$

(ii) $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{5}{4}-\frac{3}{4}} = \left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{2}}$, चूँकि $\frac{5}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$

$$= \frac{4}{9}, \text{ चूँकि } \left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{16}{81}$$

टिप्पणी : उपर्युक्त उदाहरण में, हमने देखा कि

$$\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{5}{4}} \div \left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{3}{4}} = \left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{5}{4}-\frac{3}{4}}$$

यह संबंध घातांकों के नियम $x^m \div x^n = x^{m-n}$ का पालन करता है।

3.3 ऋणात्मक परिमेय घातांक

आप कक्षा VII में पढ़ चुके हैं कि यदि m एक धनात्मक पूर्णांक तथा x एक शून्येतर परिमेय संख्या है, तो

$$x^{-m} = \frac{1}{x^m} = \left(\frac{1}{x}\right)^m$$

अर्थात् *x^{-m}, x^m का व्युत्क्रम है* या *x के व्युत्क्रम की m वीं घात है।*

हम इस नियम को परिमेय घातांकों के लिए भी स्वीकार करेंगे। इस प्रकार, यदि $\frac{p}{q}$ एक धनात्मक परिमेय संख्या है, तो किसी भी शून्येतर परिमेय संख्या x के लिए

$$x^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{x^{\frac{p}{q}}} = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{p}{q}}$$

अर्थात् $x^{-\frac{p}{q}}$, $x^{\frac{p}{q}}$ का व्युत्क्रम है या x के व्युत्क्रम की घात $\frac{p}{q}$ है।

इस प्रकार, यदि $x = \frac{r}{s}$ $(r, s > 0)$ है, तब $\left(\frac{r}{s}\right)^{-\frac{p}{q}} = \left(\frac{s}{r}\right)^{\frac{p}{q}}$, क्योंकि $\frac{r}{s}$ का व्युत्क्रम $\frac{s}{r}$ है।

उदाहरण 4 : मान ज्ञात कीजिए : (i) $8^{-\frac{2}{3}}$ (ii) $\left(\frac{32}{243}\right)^{-\frac{4}{5}}$

हल : (i) $8^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$

$$= \left[\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2, \text{ क्योंकि } \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$= \frac{1}{4}$$

(ii) $\left(\frac{32}{243}\right)^{-\frac{4}{5}} = \left(\frac{243}{32}\right)^{\frac{4}{5}} = \left[\left(\frac{243}{32}\right)^{\frac{1}{5}}\right]^4$

$$= \left[\left(\frac{3^5}{2^5}\right)^{\frac{1}{5}}\right]^4 = \left[\left(\left(\frac{3}{2}\right)^5\right)^{\frac{1}{5}}\right]^4$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16}$$

उदाहरण 5 : मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{-2}{3}} \times \left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{-4}{3}}$ (ii) $\left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{-2}{3} + \left(\frac{-4}{3}\right)}$

हल : (i) $\left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{-2}{3}} \times \left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{-4}{3}}$

$$= \left(\frac{125}{27}\right)^{\frac{2}{3}} \times \left(\frac{125}{27}\right)^{\frac{4}{3}} = \left[\left(\frac{5^3}{3^3}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2 \times \left[\left(\frac{5^3}{3^3}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^4 = \left[\left(\left(\frac{5}{3}\right)^3\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2 \times \left[\left(\left(\frac{5}{3}\right)^3\right)^{\frac{1}{3}}\right]^4$$

$$= \left(\frac{5}{3}\right)^2 \times \left(\frac{5}{3}\right)^4 = \left(\frac{5}{3}\right)^6 = \frac{15625}{729}$$

(ii) $\left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{-2}{3} + \left(\frac{-4}{3}\right)} = \left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{-6}{3}}$

$$= \left(\frac{27}{125}\right)^{-2}$$

$$= \left(\frac{125}{27}\right)^2 = \frac{15625}{729}$$

टिप्पणी : उपर्युक्त उदाहरण से, हम देखते हैं कि

$$\left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{-2}{3}} \times \left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{-4}{3}} = \left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{-2}{3} + \left(\frac{-4}{3}\right)}$$

यह संबंध घातांकों के नियम $x^m \times x^m = x^{m+n}$ का पालन करता है।

उदाहरण 6 : निम्नलिखित व्यंजकों के मान ज्ञात कीजिए और जाँच कीजिए कि क्या ये मान समान हैं :

$$\text{(i)}\ \left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{-2}{3}} \div \left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{-4}{3}} \qquad \text{(ii)}\ \left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{-2}{3}-\left(\frac{-4}{3}\right)}$$

हल : (i) $$\left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{-2}{3}} \div \left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{-4}{3}} = \left(\frac{125}{27}\right)^{\frac{2}{3}} \div \left(\frac{125}{27}\right)^{\frac{4}{3}}$$

$$= \left[\left(\frac{5^3}{3^3}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2 \div \left[\left(\frac{5^3}{3^3}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^4$$

$$= \left[\left(\left(\frac{5}{3}\right)^3\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2 \div \left[\left(\left(\frac{5}{3}\right)^3\right)^{\frac{1}{3}}\right]^4$$

$$= \left(\frac{5}{3}\right)^2 \div \left(\frac{5}{3}\right)^4 = \left(\frac{5}{3}\right)^{2-4}$$

$$= \left(\frac{5}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

(ii) $$\left(\frac{27}{125}\right)^{-\frac{2}{3}-\left(-\frac{4}{3}\right)} = \left(\frac{27}{125}\right)^{-\frac{2}{3}+\frac{4}{3}}$$

$$= \left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{2}{3}} = \left[\left(\frac{3^3}{5^3}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2$$

$$= \left[\left(\left(\frac{3}{5}\right)^3\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

हाँ, ये दोनों मान समान हैं।

टिप्पणी : उपरोक्त उदाहरण से हमें ज्ञात होता है कि

$$\left(\frac{27}{125}\right)^{-\frac{2}{3}} \div \left(\frac{27}{125}\right)^{-\frac{4}{3}} = \left(\frac{27}{125}\right)^{-\frac{2}{3}-\left(-\frac{4}{3}\right)}$$

जो कि घातांकों के नियम $x^m \div x^n = x^{m-n}$ का पालन करता है।

3.4 घातांकों के नियम

हम जानते हैं कि यदि x एक शून्येतर परिमेय संख्या है तथा m व n दो पूर्णांक घातांक हैं, तब

$$x^m \times x^n = x^{m+n} \quad (1)$$

$$x^m \div x^n = x^{m-n} \quad (2)$$

$$\left(x^m\right)^n = x^{m \times n} \quad (3)$$

साथ ही, यदि x और y दो शून्येतर परिमेय संख्याएँ हैं, तब

$$x^m \times y^m = (x \times y)^m \quad (4)$$

उपर्युक्त सभी संबंध परिमेय घातांकों m व n तथा धनात्मक परिमेय संख्याओं x व y के लिए भी सत्य हैं। उदाहरण 2 व 5 निम्नलिखित नियम को स्पष्ट करते हैं :

नियम (1) : यदि $x > 0$ एक परिमेय संख्या है तथा m व n परिमेय घातांक हैं, तब, इसी प्रकार, उदाहरण 3 व 6 अग्रलिखित नियम को स्पष्ट करते हैं :

$$x^m \times x^n = x^{m+n}$$

नियम (2) : परिमेय संख्या $x > 0$ तथा परिमेय घातांकों m व n के लिए,

$$x^m \div x^n = x^{m-n}$$

उपर्युक्त दोनों नियम तब भी सत्य हैं, जब दोनों में से एक घातांक धनात्मक तथा दूसरा ऋणात्मक हो।

अब हम पहले बताए गए संबंध (3) का परिमेय घातांकों के लिए सत्यापन करेंगे। इसके लिए आगे दिए गए उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 7 : (i) $\left[\left(\frac{25}{9}\right)^{\frac{5}{2}}\right]^{\frac{3}{5}}$ तथा (ii) $\left(\frac{25}{9}\right)^{\frac{5}{2} \times \frac{3}{5}}$ का मान ज्ञात कीजिए और दिखाइए कि दोनों मान बराबर हैं।

हल : (i) $\left[\left(\frac{25}{9}\right)^{\frac{5}{2}}\right]^{\frac{3}{5}} = \left[\left\{\left(\frac{5^2}{3^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^5\right]^{\frac{3}{5}}$

$$= \left[\left\{\left(\left(\frac{5}{3}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^5\right]^{\frac{3}{5}}$$

$$= \left[\left(\frac{5}{3}\right)^5\right]^{\frac{3}{5}} = \left[\left\{\left(\frac{5}{3}\right)^5\right\}^{\frac{1}{5}}\right]^3$$

$$= \left(\frac{5}{3}\right)^3 = \frac{5^3}{3^3} = \frac{125}{27}$$

(ii) $\left(\frac{25}{9}\right)^{\frac{5}{2}\times\frac{3}{5}} = \left(\frac{25}{9}\right)^{\frac{3}{2}}$

$$= \left[\left\{\left(\frac{5}{3}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\right]^3$$

$$= \left(\frac{5}{3}\right)^3 = \frac{5^3}{3^3}$$

$$= \frac{125}{27}$$

हाँ, दोनों मान बराबर हैं।

उदाहरण 8 : सत्यापित कीजिए : $\left[(729)^{\frac{-5}{3}}\right]^{-\frac{1}{2}} = (729)^{-\frac{5}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)}$

हल : $\left[(729)^{\frac{-5}{3}}\right]^{-\frac{1}{2}} = \left[\left(\frac{1}{729}\right)^{\frac{5}{3}}\right]^{-\frac{1}{2}} = \left[\left\{\left(\frac{1}{9^3}\right)^{\frac{1}{3}}\right\}^5\right]^{-\frac{1}{2}}$

$$= \left[\left(\frac{1}{9}\right)^5\right]^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{9^5}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{9^5}{1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\left(3^2\right)^5\right]^{\frac{1}{2}} = \left(3^{10}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 3^5 = 243$$

साथ ही, $(729)^{\frac{-5}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)} = (729)^{\frac{5}{6}} = \left(3^6\right)^{\frac{5}{6}}$

$$= \left[\left(3^6\right)^{\frac{1}{6}}\right]^5 = 3^5 = 243$$

अतः, $\left[(729)^{\frac{-5}{3}}\right]^{-\frac{1}{2}} = (729)^{\frac{-5}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)}$

उपर्युक्त दोनों उदाहरणों से निम्नलिखित नियम का सत्यापन होता है :

नियम (3) : यदि $x > 0$ एक परिमेय संख्या है तथा m व n दो परिमेय घातांक हैं, तो

$$\left(x^m\right)^n = x^{m\times n}$$

अब हम पहले बताए गए संबंध (4) का परिमेय घातांकों के लिए सत्यापन करेंगे।

$$\left(\frac{8}{125}\right)^{\frac{2}{3}} \times \left(\frac{64}{27}\right)^{\frac{2}{3}} = \left[\left(\frac{2^3}{5^3}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2 \times \left[\left(\frac{4^3}{3^3}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2$$

$$= \left[\left(\left(\frac{2}{5}\right)^3\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2 \times \left[\left(\left(\frac{4}{3}\right)^3\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2$$

$$= \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

$$= \left(\frac{2}{5} \times \frac{4}{3}\right)^2 = \left(\frac{8}{15}\right)^2$$

$$= \frac{64}{225},$$

तथा $$\left(\frac{8}{125} \times \frac{64}{27}\right)^{\frac{2}{3}} = \left[\left(\frac{8 \times 64}{125 \times 27}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2 = \left[\left(\frac{8^3}{5^3 \times 3^3}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2$$

$$= \left[\left(\left(\frac{8}{5 \times 3}\right)^3\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2 = \left(\frac{8}{15}\right)^2$$

$$= \frac{64}{225}$$

इसी प्रकार,

$$(27)^{-\frac{1}{3}} \times \left(\frac{64}{729}\right)^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}} \times \left(\frac{729}{64}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left(\frac{1}{3^3}\right)^{\frac{1}{3}} \times \left(\left(\frac{9}{4}\right)^3\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

तथा $$\left(27 \times \frac{64}{729}\right)^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{64}{27}\right)^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{1}{3}} = \left[\left(\frac{3}{4}\right)^3\right]^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$$

इस प्रकार, हमने निम्नलिखित नियम को सत्यापित किया है:

नियम (4) : यदि $x > 0$ व $y > 0$ दो परिमेय संख्याएँ हैं तथा m एक परिमेय घातांक है, तो $x^m \times y^m = (x \times y)^m$

हम अब आगे यह मानकर चलेंगे कि अनुच्छेद 3.4 में दिए गए नियम (1) से (4) सभी धनात्मक परिमेय आधारों तथा सभी परिमेय घतांकों के लिए सत्य हैं।

उदाहरण 9 : मान ज्ञात कीजिए : (i) $(0.125)^{\frac{2}{3}}$ (ii) $(0.000729)^{\frac{-3}{4}} \times (0.09)^{\frac{-3}{4}}$

हल : (i) $$(0.125)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{125}{1000}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$= \left(\frac{5^3}{10^3}\right)^{\frac{2}{3}} = \left[\left(\frac{5}{10}\right)^3\right]^{\frac{2}{3}}$$

$$= \left(\frac{5}{10}\right)^{3\times\frac{2}{3}}, \text{ नियम (3) के प्रयोग द्वारा}$$

$$= \left(\frac{5}{10}\right)^2 = \frac{5^2}{10^2}$$

$$= \frac{25}{100} = 0.25$$

(ii) $$(0.000729)^{\frac{-3}{4}} \times (0.09)^{\frac{-3}{4}} = \left(\frac{729}{1000000}\right)^{\frac{-3}{4}} \times \left(\frac{9}{100}\right)^{\frac{-3}{4}}$$

$$= \left(\frac{1000000}{729}\right)^{\frac{3}{4}} \times \left(\frac{100}{9}\right)^{\frac{3}{4}}$$

$$= \left(\frac{10^6}{9^3}\right)^{\frac{3}{4}} \times \left(\frac{10^2}{9}\right)^{\frac{3}{4}}$$

$$= \left(\frac{10^6 \times 10^2}{9^3 \times 9}\right)^{\frac{3}{4}}, \text{ नियम (4) के प्रयोग द्वारा}$$

$$= \left(\frac{10^8}{9^4}\right)^{\frac{3}{4}} = \frac{10^{8\times\frac{3}{4}}}{9^{4\times\frac{3}{4}}}$$

$$= \frac{10^6}{9^3} = \frac{1000000}{729}$$

उदाहरण 10 : मान ज्ञात कीजिए : (i) $(13^2 - 5^2)^{\frac{3}{2}}$ (ii) $(1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3)^{-\frac{3}{2}}$

हल: (i) $$(13^2 - 5^2)^{\frac{3}{2}} = [(13+5)\times(13-5)]^{\frac{3}{2}}, \; [x^2 - a^2 = (x+a)(x-a)]$$

$$= (18 \times 8)^{\frac{3}{2}} = (3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2)^{\frac{3}{2}}$$

$$= (3^2 \times 2^4)^{\frac{3}{2}} = (3^2)^{\frac{3}{2}} \times (2^4)^{\frac{3}{2}} \qquad \text{[नियम (4)]}$$

$$= 3^{2\times\frac{3}{2}} \times 2^{4\times\frac{3}{2}}$$ [नियम (3)]

$$= 3^3 \times 2^6 = 1728$$

(ii) $\left(1^3+2^3+3^3+4^3\right)^{-\frac{3}{2}} = (1+8+27+64)^{-\frac{3}{2}}$

$$= (100)^{-\frac{3}{2}} = \left(10^2\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= 10^{2\times\left(\frac{-3}{2}\right)}$$ [नियम (3)]

$$= 10^{-3} = \frac{1}{1000}$$

3.5 करणियाँ एवं करणीगत राशियाँ

हम जानते हैं कि यदि $y>0$ है, तो $y^{\frac{1}{q}} = x$ को हम $x = \sqrt[q]{y}$ द्वारा भी व्यक्त करते हैं। इस प्रकार, $y^{\frac{1}{q}}$ तथा $\sqrt[q]{y}$ समान अर्थों वाले दो चिह्नांकन हैं। रूप $y^{\frac{1}{q}}$ *घातांकी रूप* (*Exponential form*) कहलाता है तथा $\sqrt[q]{y}$ *करणी रूप* (*Radical form*) कहलाता है। चिह्न '$\sqrt{\ }$' *करणी चिह्न* (*Radical sign*) कहलाता है तथा $\sqrt[q]{y}$ को एक *करणी* (*Radical*) कहते हैं। संख्या q को *करणी का घातांक* (*index of radical*) तथा y को *करणीगत राशि* (*radicand*) कहते हैं। इस बात पर ध्यान दें कि करणी का घातांक एक धनात्मक पूर्णांक ही होता है। यदि q कोई ऋणात्मक पूर्णांक हो, जैसे कि $32^{-\frac{1}{5}}$ में, तो हम इसे $\sqrt[-5]{32}$ के रूप में नहीं लिखते हैं। $32^{-\frac{1}{5}}$ को हम $\left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{5}}$ अर्थात् $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$ लिखते हैं। यहाँ करणीगत राशि $\frac{1}{32}$ तथा करणी का घातांक 5 है।

उदाहरण 11 : व्यक्त करें :

(i) $\sqrt[5]{1234}$ को घातांकी रूप में

(ii) $\left(\frac{567}{890}\right)^{-\frac{1}{8}}$ को करणी रूप में

हल : (i) वांछित घातांकी रूप है : $(1234)^{\frac{1}{5}}$

(ii) $\left(\frac{567}{890}\right)^{\frac{-1}{8}} = \left(\frac{890}{567}\right)^{\frac{1}{8}}$

अतः वांछित करणी रूप है: $\sqrt[8]{\frac{890}{567}}$

प्रश्नावली 3.1

1. निम्नलिखित में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए :

(i) $(16)^{\frac{1}{2}}$ (ii) $(243)^{\frac{1}{5}}$ (iii) $(15625)^{\frac{1}{6}}$

2. मान ज्ञात कीजिए : (i) $(32768)^{\frac{1}{15}}$ (ii) $(279936)^{\frac{1}{7}}$

3. मान ज्ञात कीजिए : (i) $\left(\frac{625}{81}\right)^{\frac{1}{4}}$ (ii) $\left(\frac{343}{1331}\right)^{\frac{1}{3}}$

4. मान निकालिए : (i) $\left(\frac{390625}{6561}\right)^{\frac{1}{8}}$ (ii) $\left(\frac{117649}{1771561}\right)^{\frac{1}{6}}$

5. निम्न को घातांकी रूप में लिखिए :

(i) $\sqrt{5}$ (ii) $\sqrt[3]{7}$ (iii) $\sqrt[9]{1100}$ (iv) $\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$ (v) $\sqrt[8]{\frac{61}{1123}}$

6. निम्नलिखित को करणी रूप में लिखिए। प्रत्येक के लिए करणीगत राशि व करणी का घातांक बताइए।

(i) $16^{\frac{1}{2}}$ (ii) $125^{\frac{1}{3}}$ (iii) $\left(\frac{6}{17}\right)^{\frac{1}{9}}$ (iv) $\left(\frac{23}{11}\right)^{-\frac{1}{11}}$ (v) $\left(\frac{328}{61}\right)^{-\frac{1}{17}}$

7. निम्नलिखित में से प्रत्येक का मान x^p के qवें मूल के रूप में अर्थात् सूत्र $x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{q}}$ का प्रयोग करते हुए ज्ञात कीजिए :

(i) $8^{\frac{5}{3}}$ (ii) $\left(\frac{81}{16}\right)^{\frac{3}{4}}$ (iii) $\left(\frac{25}{49}\right)^{\frac{7}{2}}$ (iv) $\left(\frac{256}{6561}\right)^{\frac{3}{8}}$

8. प्रश्न 7 के व्यंजकों का मान x के q वें मूल की घात p के रूप मे, अर्थात् सूत्र $x^{\frac{p}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$ का प्रयोग कर, ज्ञात करें।

9. मान ज्ञात कीजिए : (i) $343^{-\frac{1}{3}}$ (ii) $\left(\frac{625}{81}\right)^{-\frac{1}{4}}$

10. मान ज्ञात कीजिए : (i) $\left(\frac{25}{81}\right)^{-\frac{3}{2}}$ (ii) $\left(\frac{256}{6561}\right)^{-\frac{5}{8}}$

11. निम्नलिखित को सरल कीजिए :

(i) $23^{\frac{1}{2}} \times 23^{\frac{3}{2}}$ (ii) $11^{-\frac{4}{3}} \times 11^{-\frac{5}{3}}$

(iii) $3 \times 9^{\frac{3}{2}} \times 9^{-\frac{1}{2}}$ (iv) $27^{\frac{2}{3}} \times 27^{\frac{1}{3}} \times 27^{-\frac{4}{3}}$

12. सरल कीजिए :

(i) $15^{\frac{3}{2}} \div \left(\frac{1}{15}\right)^{\frac{1}{2}}$ (ii) $\left(\frac{2}{13}\right)^{\frac{4}{3}} \div \left(\frac{2}{13}\right)^{\frac{5}{3}}$

(iii) $3 \times 9^{\frac{1}{2}} \div 9^{\frac{3}{2}}$ (iv) $27^{\frac{2}{3}} \div 27^{\frac{1}{3}} \times 27^{-\frac{4}{3}}$

13. मान ज्ञात कीजिए :

(i) $(0.04)^{\frac{3}{2}}$ (ii) $(0.008)^{\frac{2}{3}}$ (iii) $(6.25)^{\frac{3}{2}}$ (iv) $(0.000064)^{\frac{5}{6}}$

14. निम्नलिखित के मान निकालिए :

(i) $(3^2 + 4^2)^{-\frac{1}{2}}$ (ii) $(5^2 + 12^2)^{\frac{3}{2}}$

(iii) $(17^2 - 8^2)^{\frac{1}{2}}$ (iv) $(1^3 + 2^3 + 3^3)^{-\frac{5}{2}}$

15. निम्नलिखित कथनों के लिए सत्य (T) अथवा असत्य (F) लिखिए :

(i) यदि x एक पूर्ण वर्ग है, तो $\sqrt{x}$ एक परिमेय संख्या है।

(ii) यदि x एक ऋणात्मक परिमेय संख्या है, तो $\sqrt[3]{x^3} = x$ सत्य नहीं है।

(iii) प्रत्येक पूर्णांक x के लिए, $x^{\frac{3}{2}}$ एक परिमेय संख्या है।

(iv) $\sqrt[p]{x^q}$ का घातांकी रूप $x^{\frac{p}{q}}$ है।

(v) $\left(x^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{1}{q}}$ का करणी रूप $\sqrt[pq]{x}$ है।

(vi) सभी परिमेय संख्याओं $x > 0$ के लिए $(x^{-3})^{-4} = x^{12}$ सत्य है।

(vii) करणी का घातांक कभी ऋणात्मक नहीं होता।

याद रखने योग्य बातें

1. यदि m एक धनात्मक पूर्णांक है तथा x व y ऐसी परिमेय संख्याएँ हैं कि $x^m = y$, तो $y^{\frac{1}{m}} = x$ होता है।

2. $y^{\frac{1}{m}}$, y का m वाँ मूल कहलाता है तथा इसे $\sqrt[m]{y}$ के रूप में लिखते हैं।

3. यदि $x = \frac{r}{s}$ एक शून्येतर परिमेय संख्या है, तो $\left(\frac{r}{s}\right)^{-m} = \left(\frac{s}{r}\right)^{m}$ है।

4. एक परिमेय घातांक $\frac{p}{q}$ के लिए,

   $x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$, x^p का q वाँ मूल,

   अथवा $x^{\frac{p}{q}} = (\sqrt[q]{x})^p$, x के q वें मूल का घात p होता है।

5. यदि $x = \frac{r}{s}$ एक धनात्मक परिमेय संख्या है, तो

   $$x^{-\frac{p}{q}} = \left(\frac{r}{s}\right)^{-\frac{p}{q}} = \left(\frac{s}{r}\right)^{\frac{p}{q}}$$

6. यदि x एक धनात्मक परिमेय संख्या है तथा m व n कोई परिमेय घातांक हैं, तो

   (i) $x^m \times x^n = x^{m+n}$

   (ii) $x^m \div x^n = x^{m-n}$

   (iii) $(x^m)^n = x^{m \times n}$

7. यदि x व y धनात्मक परिमेय संख्याएँ हैं तथा m कोई भी परिमेय घातांक है, तो

   $x^m \times y^m = (x \times y)^m$ होगा।

8. यदि $x = \sqrt[q]{y} = y^{\frac{1}{q}}$ है, तो $y^{\frac{1}{q}}$, x का घातांकी रूप है तथा $\sqrt[q]{y}$, x का करणी रूप है। यहाँ q करणी का घातांक तथा y करणीगत राशि है।

अतीत के झरोखे से

यह एक सर्वमान्य तथ्य है कि विश्व की सभी प्राचीन सभ्यताओं में किसी-न-किसी प्रकार की संख्याकन पद्धति विद्यमान थी और प्रत्येक सभ्यता ने विभिन्न संख्या पद्धतियों के उद्भव एवं विकास में कुछ-न-कुछ योगदान दिया। बेबिलोनिया में लगभग 2100 ई. पू. के कुछ शिलालेख (tablets) प्राप्त हुए हैं जिन पर संख्याओं 1 से 60 तक के वर्ग तथा 1 से 32 तक की संख्याओं के घन अंकित हैं। यहाँ 'वर्ग' शब्द की उत्पत्ति इस तथ्य के कारण हुई है कि दो समान संख्याओं का गुणनफल उस वर्ग के क्षेत्रफल के बराबर होता है जिसकी भुजा गुणा की जा रही संख्या के संख्यात्मक मान के बराबर होती है। इसी प्रकार, a^3 में 'घन' शब्द का आधार भी ऐसा ही है। पूर्णांकीय घातांकों का वर्तमान संकेतन *देकार्त* (*Descartes*) (1637) की देन है। उनके अनुसार "a को a से गुणा करने के लिए हम $a\,a$ अथवा a^2 लिखते हैं तथा गुणनफल को एक बार पुनः a से गुणा करने के लिए a^3 लिखते हैं और इसी प्रकार लिखते चले जाते हैं..." तथापि व्यापक घातांकों के सिद्धांत इससे बहुत पहले ही ज्ञात थे।

वर्ग $a \times a = a^2$ को संख्या a से प्राप्त किया जाता है, अतः स्वाभाविक रूप से a को a^2 *का मूल* अर्थात् *वर्गमूल* कहा गया। इसी प्रकार, a को a^3 का घनमूल कहते हैं। वर्गमूल ज्ञात करने की एक विधि *'दी एलीमेंट्स'* (*The Elements*) नामक पुस्तक में दी गई है। इस पुस्तक में अपने समय तक की यूनानी गणित की समस्त जानकारी उपलब्ध है। पुस्तक में प्राप्त वर्गमूल ज्ञात करने की विधि प्रचलित विधि से बहुत कुछ मिलती-जुलती है। कुछ-कुछ प्रचलित विधि के समान ही वर्गमूल ज्ञात करने की एक विधि एलेक्ज़ेंड्रिया निवासी *थिआन* (*Theon*) (390) ने षाष्ठिक (60 आधार वाली) संख्या पद्धति का उपयोग कर विकसित की। थिआन जैसी ही एक विधि का वर्णन *भास्कर* (1150) ने भी किया है। अंक गणित की पुरानी मुद्रित पुस्तकों में वर्गमूल संख्याओं को कुछ-कुछ विभाजन की पंक्ति (galley) विधि की भाँति व्यवस्थित कर, ज्ञात किया जाता था। *कातानिओ* (*Cataneo*) (1546) तथा *कातात्दी* (*Cataldi*) (1613) के प्रयासों से 16वीं तथा 17वीं शताब्दियों में वर्तमान में प्रचलित विधि लोकप्रिय हो गई थी।

वर्गमूल की तुलना में घनमूल निकालना एक कठिन प्रक्रिया है। वर्गमूल ज्ञात करने की विधियाँ सरल से सूत्र $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ के ज्यामितीय स्वरूप पर आधारित थीं। स्वाभाविक रूप से घनमूल ज्ञात करने की क्रिया अपेक्षाकृत जटिल

सूत्र $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ पर आधारित थी। घनमूल ज्ञात करने की समस्या की दिशा में अनेक प्राचीन गणितज्ञों ने प्रयास किए। इस संदर्भ में *ब्रह्मगुप्त* (628), *अल कारखी (al-Karkhi)* (1020), *भास्कर* (1150) तथा *फिबोनाशी, (Fibonacci)* (1202) के नाम लिए जा सकते हैं। 16वीं व 17वीं शताब्दी में लोगों ने घनमूल ज्ञात करने की प्रक्रिया को x^2 घन गुटकों (blocks) के x घन गुटकों द्वारा समझाया (ध्यान दीजिए $x^3 = x \times x^2$ आदि)।

1360 में फ्रांसीसी गणितज्ञ *निकोल ऑरसम (Nicole Oresme)* (1360) तथा कुछ अन्य गणितज्ञों ने घाताँकों के लिए $\frac{1}{2}$ जैसी संख्याओं का प्रयोग आरंभ कर दिया था, परंतु घातांकों के सिद्धांत का संतोषजनक स्पष्टीकरण *वालिस (Wallis)* (1655) द्वारा 17 वीं शताब्दी में ही दिया गया। इन्होंने भिन्नात्मक तथा ऋणात्मक घातांकों का प्रयोग किया। इन्हीं का सुझाव था कि x^0 को 1 तथा $x^{p/q}$ को $\sqrt[q]{x^p}$ माना जाए। *न्यूटन (Newton)* (1669) ने वालिस के कार्य को परिमार्जित किया। न्यूटन के बाद घातांकों के वर्तमान संकेतन पूर्णतया उपयोग में आने लगे।

अध्याय

लाभ, हानि तथा बट्टा

4.1 भूमिका

कक्षा VI में, हमने प्रतिशतता के एक अनुप्रयोग के रूप में *लाभ और हानि* का अध्ययन प्रारंभ किया था। कक्षा VII में, हमने *उपरिव्ययों (overhead expenses)* को सम्मिलित कर, इस अध्ययन का विस्तार किया। इस अध्याय में, हम लाभ और हानि के बारे में कुछ और अधिक सीखेंगे। हम एक प्रारंभिक स्तर पर *बट्टे (discount)* की संकल्पना का परिचय भी कराएँगे तथा इससे संबंधित कुछ सरल प्रश्नों को हल करेंगे।

4.2 लाभ और हानि

आप पिछली कक्षाओं में, लाभ और हानि से पहले ही परिचित हो चुके हैं। याद कीजिए कि यदि किसी वस्तु का विक्रय मूल्य (वि.मू.) उसके क्रय मूल्य (क्र.मू.) से अधिक हो तो हम कहते हैं कि उस पर लाभ हुआ है। इसके विपरीत, यदि किसी वस्तु का वि.मू. उसके क्र.मू. से कम हो तो हम कहते हैं कि उस पर हानि हुई है। लाभ और हानि से जुड़े विभिन्न संबंधों की एक सूची नीचे दी गई है:

1. लाभ की स्थिति में (अर्थात् जब वि.मू. > क्र.मू.),

   (i) लाभ = वि.मू. − क्र.मू.

   (ii) वि.मू. = लाभ + क्र.मू.

   (iii) क्र.मू. = वि.मू. − लाभ

   (iv) लाभ % $= \frac{\text{लाभ}}{\text{क्र.मू.}} \times 100$

   (v) लाभ $= \frac{\text{क्र.मू.} \times \text{लाभ \%}}{100}$ [उपर्युक्त (iv) से]

(vi) $\text{वि.मू.} = \text{क्र.मू.} \times \left(\frac{100 + \text{लाभ \%}}{100}\right)$ [उपर्युक्त (ii) और (v) से]

(vii) $\text{क्र.मू.} = \frac{100 \times \text{वि.मू.}}{100 + \text{लाभ \%}}$ [उपर्युक्त (vi) से]

2. हानि की स्थिति में (अर्थात् जब वि.मू. < क्र.मू.),

(i) $\text{हानि} = \text{क्र.मू.} - \text{वि.मू.}$

(ii) $\text{वि.मू.} = \text{क्र.मू.} - \text{हानि}$

(iii) $\text{क्र.मू.} = \text{हानि} + \text{वि.मू.}$

(iv) $\text{हानि \%} = \frac{\text{हानि}}{\text{क्र.मू.}} \times 100$

(v) $\text{हानि} = \frac{\text{क्र.मू.} \times \text{हानि \%}}{100}$ [उपर्युक्त (iv) से]

(vi) $\text{वि.मू.} = \text{क्र.मू.} \times \left(\frac{100 - \text{हानि \%}}{100}\right)$ [उपर्युक्त (ii) और (v) से]

(vii) $\text{क्र.मू.} = \frac{100 \times \text{वि.मू.}}{100 - \text{हानि \%}}$ [उपर्युक्त (vi) से]

यह सदैव ध्यान में रखना चाहिए कि उपरिव्यय, जैसे कि परिवहन व्यय, मरम्मत इत्यादि पर हुए व्यय, (यदि कोई हो तो) सदैव क्रय मूल्य में सम्मिलित किए जाते हैं। अब हम लाभ और हानि से संबंधित कुछ और उदाहरणों पर विचार करते हैं।

उदाहरण 1 : अनवर ने 2 रु प्रति संतरे की दर से 120 संतरे खरीदे। उसने 60 % संतरे 2.50 रु प्रति संतरे की दर से बेचे तथा शेष संतरे 2 रु प्रति संतरे की दर से बेचे। उसका लाभ प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

हल : 120 संतरों का क्र.मू. $= 2 \times 120$ रु $= 240$ रु

120 संतरों का 60 % $= \frac{60}{100} \times 120$ संतरे $= 72$ संतरे

अब 72 संतरों का वि.मू. $= 2.50 \times 72$ रु $= 180$ रु

तथा शेष 120 − 72, अर्थात् 48 संतरों की वि.मू. $= 2 \times 48$ रु $= 96$ रु

$\therefore$ 120 संतरों का वि.मू. = 180 रु + 96 रु = 276 रु

अत:, लाभ = वि.मू. - क्र. मू. = 276 रु - 240 रु = 36 रु

$\therefore$ लाभ % $= \frac{36}{240} \times 100 = 15$

अत:, अनवर का लाभ 15% है।

उदाहरण 2 : मनिंदर ने दो घोड़े 20000 रु प्रति घोड़े की दर से खरीदे। उसने एक घोड़े को 15% लाभ पर बेच दिया। परंतु दूसरे घोड़े को उसे हानि पर बेचना पड़ा। यदि उसे पूरे सौदे पर 1800 रु की हानि हुई हो, तो दूसरे घोड़े का विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : दोनों घोड़ों का क्र.मू. = 2 × 20000 रु = 40000 रु

कुल हानि = 1800 रु

$\therefore$ कुल वि.मू. = 40000 रु – 1800 रु = 38200 रु (1)

अब 15% लाभ से पहले घोड़े का वि.मू.

$$= \text{क्र.मू.} \left(\frac{100 + \text{लाभ \%}}{100}\right)$$

$$= 20000 \frac{(100+15)}{100} \text{ रु} = 23000 \text{ रु} \quad (2)$$

$\therefore$ दूसरे घोड़े का वि.मू. = 38200 रु – 23000 रु = 15200 रु [(1) और (2) से]

अत: दूसरे घोड़े का वि.मू. 15200 रु है।

उदाहरण 3 : 144 मुर्गियों को बेचने पर मल्लेश्वरी को 6 मुर्गियों के वि.मू. के बराबर की हानि होती है। उसकी हानि प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए 1 मुर्गी का वि.मू. 1 रु है।

$\therefore$ 144 मुर्गियों का वि.मू. = 1 × 144 रु = 144 रु

और हानि = 6 मुर्गियों का वि.मू. = 1 × 6 रु = 6 रु

$\therefore$ 144 मुर्गियों का क्र.मू. = वि.मू. + हानि = 144 रु + 6 रु = 150 रु

अत:, हानि प्रतिशत $= \frac{\text{हानि}}{\text{क्र.मू.}} \times 100 = \frac{6}{150} \times 100 = 4$

अत:, मल्लेश्वरी को 4 % की हानि हुई।

उदाहरण 4 : किसी किसान ने दो बैल 18000 रु प्रति बैल की दर से बेचे। एक बैल पर उसे 20 % का लाभ हुआ तथा दूसरे पर 20 % की हानि हुई। उसका कुल लाभ या हानि ज्ञात कीजिए।

हल : पहले बैल का वि.मू. = 18000 रु, लाभ = 20%

अतः, $$\text{क्र.मू.} = \frac{100 \times \text{वि.मू.}}{100 + \text{लाभ}\,\%}$$

$$= \frac{100 \times 18000}{100 + 20} \text{ रु} = 15000 \text{ रु} \qquad (1)$$

दूसरे बैल का वि.मू. = 18000 रु, हानि = 20 %

अतः, $$\text{क्र.मू.} = \frac{100 \times \text{वि.मू.}}{100 - \text{हानि}\,\%}$$

$$= \frac{100 \times 18000}{100 - 20} \text{ रु} = 22500 \text{ रु} \qquad (2)$$

अब, कुल क्र.मू. = 15000 रु + 22500 रु = 37500 रु [(1) और (2)से]

तथा कुल वि.मू. = 2 × 18000 रु = 36000 रु

अतः, हानि = क्र.मू. − वि.मू.

= 37500 रु − 36000 रु = 1500 रु

प्रश्नावली 4.1

1. किसी दुकानदार ने 2000 रु प्रति कंबल की दर से 100 कंबल खरीदे। उसे ज्ञात हुआ कि उनमें से 10 कंबल खराब हैं और उसने उन्हें 1200 रु प्रति कंबल की दर से बेच दिया। वह शेष कंबलों को किस दर पर बेचे कि उसे पूरे सौदे पर 14 % का लाभ हो?
2. सरिता और सलमा ने एक-एक भैंस एक ही मूल्य पर खरीदी। सरिता ने अपनी भैंस 14880 रु में बेच कर 7 % हानि उठाई। सलमा अपनी भैंस किस मूल्य पर बेचे कि उसे 5 % लाभ हो?
3. गोरांग ने 48 रु प्रति kg की दर से 60 kg सेब खरीदे। उसने 70 % सेब 60 रु प्रति kg तथा शेष सेब 35 रु प्रति kg की दर से बेच दिए। पूरे सौदे में गोरांग का लाभ या हानि प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

4. किसी सुनार ने एक थोक विक्रेता से 100 ग्राम सोना 54000 रु में खरीदा। उसने यह सोना 10 % लाभ पर बेच दिया। ज्ञात कीजिए :

   (i) सुनार के लिए 10 ग्राम सोने का वि.मू.

   (ii) थोक विक्रेता के लिए 10 ग्राम सोने का क्र.मू., यदि उसका लाभ 8 % है

5. विलियम 1 क्विंटल गेहूँ 924 रु में बेचकर 12 % लाभ उठाता है। 1 क्विंटल चावल इसी मूल्य पर बेचने से उसे 12 % हानि होती है। ज्ञात कीजिए :

   (i) गेहूँ का क्र.मू.

   (ii) चावल का क्र.मू.

   (iii) पूरे सौदे पर लाभ या हानि प्रतिशत

6. एक ट्राइसिकल 16 % के लाभ पर बेची जाती है। यदि उसे 100 रु अधिक में बेचा जाता, तो लाभ 20 % होता। ट्राइसिकल का क्र.मू. ज्ञात कीजिए।

   [*संकेत :* मान लीजिए क्र.मू. = 100 रु है। दोनों विक्रय मूल्यों का अंतर (120–116) रु = 4 रु इत्यादि।]

7. अहमद ने एक रेडियो 2700 रु में खरीदा और 300 रु उसकी मरम्मत पर व्यय किए। फिर उसने वह रेडियो करीम को 25 % लाभ पर बेच दिया। करीम ने उसे 10 % की हानि पर सुब्रामनियम को बेच दिया। ज्ञात कीजिए :

   (i) करीम के लिए रेडियो का क्र.मू.

   (ii) सुब्रामनियम के लिए रेडियो का क्र.मू.

8. उत्कर्ष ने 20 डाइनिंग (dining) मेजें 120000 रु में खरीदी और उन्हें 4 डाइनिंग मेजों के विक्रय मूल्य के बराबर लाभ पर बेच दिया। 1 डाइनिंग मेज का विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

9. योगिता ने एक भूखंड डिम्पी को 20 % लाभ पर बेचा। डिम्पी ने उसे 10 % लाभ पर अंजलि को बेच दिया। यदि अंजलि को इस भूखंड के लिए 330000 रु देने पड़े हों, तो योगिता के लिए भूखंड का क्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

10. किसी दुकानदार ने 250 बल्ब 10 रु प्रति बल्ब की दर से खरीदे। परंतु इनमें से 12 बल्ब फ्यूज़ हो गए जिन्हें उसे फेंकना पड़ा। उसने शेष बल्ब 12 रु प्रति बल्ब की दर से बेच दिए। इस सौदे में उसका लाभ या हानि प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

11. किसी कमीज को 4 % और 5 % के लाभों पर बेचे जाने पर उसके विक्रय मूल्यों का अंतर 6 रु है। ज्ञात कीजिए :

    (i) कमीज का क्र.मू.   (ii) कमीज के दोनों विक्रय मूल्य

12. तोशिबा ने 100 मुर्गियाँ 8000 रु में खरीदीं और इनमें से 20 को 5 % लाभ पर बेच दिया। शेष मुर्गियों को वह किस लाभ प्रतिशत पर बेचे कि पूरे सौदे पर उसे 20 % लाभ हो?

13. 10 रु की 11 की दर से कुछ टॉफिया खरीदी गईं तथा उतनी ही टॉफियाँ 10 रु की 9 की दर से खरीदी गईं। यदि इन सभी टॉफियों को 1 रु की 1 टॉफी की दर से बेचा गया हो तो पूरे सौदे पर लाभ या हानि प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

[*संकेत :* मान लीजिए खरीदी गई टॉफियों की संख्या 11 और 9 का LCM है।]

14. शबाना ने 16 दर्जन बॉल पेन खरीदे और उन्हें 8 बॉल पेनों के वि.मू. के बराबर हानि पर बेच दिया। ज्ञात कीजिए :

(i) उसकी हानि प्रतिशत

(ii) 1 दर्जन बॉल पेनों का वि.मू., यदि उसने 16 दर्जन बॉल पेन 576 रु में खरीदे थे।

15. मरियम ने दो पंखे 3605 रु में खरीदे। इनमें से एक को उसने 15 % लाभ पर बेचा तथा दूसरे को 9 % की हानि पर बेचा। यदि प्रत्येक पंखे के लिए उसे समान मूल्य प्राप्त हुआ, तो प्रत्येक पंखे का क्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

[*संकेत :* मान लीजिए पहले पंखे का क्र.मू. x रु है। तब, दूसरे पंखे का क्र.मू. $(3605-x)$ रु होगा।]

4.3 बट्टा

यद्यपि खरीदना और बेचना एक सरल कार्य प्रतीत होता है, परंतु वास्तव में यह इतना सरल है नहीं। दुकानदार अपने माल के लिए अधिक से अधिक मूल्य प्राप्त करना चाहते हैं, जबकि ग्राहक उसी माल के लिए कम से कम संभव मूल्य देना चाहता है। दुकानदार ग्राहकों को आकर्षित करने के लिए अनेक योजनाएँ बनाते हैं। उधार पर वस्तुएँ बेचना एक ऐसी ही योजना है। परंतु वास्तविकता यह है कि दुकानदार अपने माल का नकद मूल्य प्राप्त करना अधिक पसंद करते हैं। कभी-कभी वे ग्राहकों को एक प्रकार की छूट या प्रोत्साहन प्रदान करते हैं। ये प्रोत्साहन ग्राहकों को यह विश्वास दिलाने के लिए दिए जाते हैं कि वे माल सस्ते में खरीद रहे हैं। दुकानदार ग्राहकों को प्रोत्साहन विभिन्न रूपों में देते हैं। उदाहरणार्थ, आपकों निम्न प्रकार के विज्ञापन देखने को मिल सकते हैं :

'अब केवल 1 kg के मूल्य पर 1100 g डिटरजैंट लीजिए।'

'प्रत्येक 500 g चाय के पैकट के साथ 1 मग मुफ्त।'

'प्रत्येक चादर पर 10 % त्योहार बट्टा।'

या 'आपके मन पसंद नहाने के साबुन पर 2 रु की कमी' इत्यादि।

इस प्रकार, प्रोत्साहन कभी-कभी किसी वस्तु के साथ लगे (जुड़े) मूल्य (जिसे दुकानदार ग्राहक को उस वस्तु का मूल्य बताता है) में कमी करके भी दिया जाता है। यह लगा हुआ मूल्य उस वस्तु का *अंकित मूल्य* [*Marked Price (M.P.)*] या *सूची मूल्य* [*List Price (L.P.)*] कहलाता है तथा मूल्य में की गई कमी *बट्टा (discount)* कहलाती है। इसे प्राय: अंकित मूल्य के एक विशेष प्रतिशत के रूप में दिया जाता है। ग्राहक अंकित मूल्य और बट्टे के अंतर के बराबर राशि दुकानदार को देता है। अर्थात् ग्राहक वास्तव में (अंकित मूल्य - बट्टे) के बराबर की राशि का भुगतान करता है। अत:, यह राशि वस्तु का विक्रय मूल्य (वि.मू.) होगी।

इस प्रकार, $$\text{बट्टा} = \text{अंकित मूल्य} - \text{विक्रय मूल्य} \qquad (1)$$

साथ ही, $$\text{बट्टे की दर} = \text{बट्टा } \% = \frac{\text{बट्टा}}{\text{अंकित मूल्य}} \times 100 \qquad (2)$$

अब, $$\text{विक्रय मूल्य} = \text{अंकित मूल्य} - \text{बट्टा} \qquad [(1) \text{ से}]$$

$$\therefore \quad \text{विक्रय मूल्य} = \text{अंकित मूल्य} - \frac{\text{बट्टा } \% \times \text{अंकित मूल्य}}{100} \qquad [(2) \text{ से}]$$

या $$\text{विक्रय मूल्य} = \text{अंकित मूल्य} \times \left(1 - \frac{\text{बट्टा } \%}{100}\right)$$

या $$\text{विक्रय मूल्य} = \text{अंकित मूल्य} \times \left(\frac{100 - \text{बट्टा } \%}{100}\right) \qquad (3)$$

उपर्युक्त (3) से, हम सरलता से देख सकते हैं कि

$$\text{अंकित मूल्य} = \frac{100 \times \text{विक्रय मूल्य}}{100 - \text{बट्टा } \%} \qquad (4)$$

आइए, उपर्युक्त विचारों को स्पष्ट करने के लिए कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 5 : एक पुस्तक का अंकित मूल्य 30 रु है। यह 15 % बट्टे पर बेची जाती है। इस पुस्तक पर दिया गया बट्टा और उसका विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : पुस्तक का अंकित मूल्य = 30 रु

बट्टे की दर = 15 %

$\therefore$ दिया गया बट्टा = 30 रु का 15 % = $\frac{15}{100} \times 30$ रु = 4.50 रु

अत:, पुस्तक का विक्रय मूल्य = 30 रु − 4.50 रु = 25.50 रु

उदाहरण 6 : एक मेज जिसका अंकित मूल्य 1200 रु था, एक ग्राहक को 1100 रु में बेची गई। मेज पर दिए गए बट्टे की दर ज्ञात कीजिए।

हल : अंकित मूल्य = 1200 रु

वि.मू. = 1100 रु

$\therefore$ बट्टा = (1200 − 1100) रु = 100 रु

$\therefore$ बट्टे की दर = $\frac{\text{बट्टा}}{\text{अंकित मूल्य}} \times 100\%$

$$= \frac{100}{1200} \times 100\% = 8\frac{1}{3}\%$$

उदाहरण 7 : अंकित मूल्य पर 15 % बट्टा देने के बाद एक कमीज 442 रु में बेची गई। इस कमीज का अंकित मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए अंकित मूल्य x रु है।

बट्टा = x रु का 15 %

$$= \frac{15}{100} \times x \text{ रु} = \frac{3x}{20} \text{ रु}$$

$\therefore$ वि.मू. = $\left(x - \frac{3x}{20}\right)$ रु = $\frac{17x}{20}$ रु

दिए हुए प्रतिबंध के अनुसार,

$$\frac{17x}{20} = 442$$

या $$x = \frac{442 \times 20}{17} = 520$$

अत:, कमीज का अंकित मूल्य 520 रु है।

उदाहरण 8 : कोई दुकानदार अपने ग्राहकों को 10 % का *ऑफ़ सीज़न* (*off season*) बट्टा देता है और फिर भी 26 % का लाभ अर्जित करता है। दुकानदार के लिए उस जूतों के जोड़े का क्रय मूल्य क्या है, जिसका अंकित मूल्य 1120 रु है?

हल : अंकित मूल्य = 1120 रु

बट्टे की दर = 10 %

$\therefore$ दिया गया बट्टा $= \frac{10}{100} \times 1120 =$ 112 रु

अतः, जूतों के जोड़े का विक्रय मूल्य = (1120 – 112) रु = 1008 रु

अब दुकानदार का लाभ % = 26

अतः, $$\text{क्र.मू.} = \frac{100 \times \text{वि.मू.}}{100 + \text{लाभ}\,\%}$$

$$= \frac{100 \times 1008}{100 + 26} = \frac{100 \times 1008}{126} \text{ रु} = 800 \text{ रु}$$

इस प्रकार, जूतों के जोड़े का क्रय मूल्य 800 रु है।

उदाहरण 9 : ज्योति और मीना एक बने-बनाए (रेडीमेड) वस्त्रों की दुकान चलाती हैं। वे इन वस्त्रों का मूल्य इस प्रकार अंकित करती हैं कि 12.5 % का बट्टा देने के बाद भी उन्हें 10 % का लाभ होता है। उस सूट का अंकित मूल्य ज्ञात कीजिए, जिसकी लागत उन्हें 1470 रु आई है।

हल : सूट का क्र.मू. = 1470 रु

$\therefore$ लाभ = 1470 रु का 10 %

$$= \frac{10}{100} \times 1470 \text{ रु} = 147 \text{ रु}$$

$\therefore$ सूट का वि.मू. = (1470 + 147) रु = 1617 रु

मान लीजिए अंकित मूल्य 100 रु है। तब,

बट्टा = 100 रु का 12.5 % = 12.50 रु

$\therefore$ वि.मू. = (100 – 12.50) रु = 87.50 रु

अब यदि वि.मू. 87.50 रु है, तो अंकित मूल्य = 100 रु

$\therefore$ यदि वि.मू. 1617 रु है, तो अंकित मूल्य $= \frac{100}{87.50} \times 1617$ रु $= 1848$ रु

इस प्रकार, सूट का अंकित मूल्य 1848 रु है।

अंकित मूल्य के लिए वैकल्पिक विधि :

मान लीजिए अंकित मूल्य x रु है।

हम जानते हैं कि

$$\text{अंकित मूल्य} = \frac{100 \times \text{वि.मू.}}{100 - \text{बट्टा \%}} \qquad [(4) \text{ से}]$$

या $$x = \frac{100 \times 1617}{(100 - 12.5)} = \frac{161700}{87.5} = 1848$$

इस प्रकार, सूट का अंकित मूल्य 1848 रु है।

प्रश्नावली 4.2

1. विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए, यदि
   (i) अंकित मूल्य = 320 रु और बट्टा = 12.5 % है।
   (ii) अंकित मूल्य = 990 रु और बट्टा = 10 % है।
2. बट्टे की दर ज्ञात कीजिए, यदि
   (i) अंकित मूल्य = 250 रु और विक्रय मूल्य = 235 रु है।
   (ii) अंकित मूल्य = 1880 रु और विक्रय मूल्य = 1504 रु है।
3. अंकित मूल्य ज्ञात कीजिए, यदि
   (i) वि.मू. = 1920 रु और बट्टा 4 % है।
   (ii) वि.मू. = 2970 रु और बट्टा 1 % है।
4. सिलाई मशीनों के अंकित मूल्य पर 3 % का एक बट्टा दिया जाता है। उस सिलाई मशीन के लिए एक ग्राहक को कितनी नकद राशि देनी होगी जिसका अंकित मूल्य 1300 रु है।
5. किसी स्कूटर का सूची मूल्य 35000 रु है। वह 8 % के एक बट्टे पर उपलब्ध है। उस स्कूटर का विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

6. अंकित मूल्य 1500 रु वाली एक मेज बट्टा देने के बाद 1080 रु में बेची जाती है। बट्टे की दर ज्ञात कीजिए।

7. उस अलमारी का अंकित मूल्य ज्ञात कीजिए जो 5 % का बट्टा देने के बाद 5225 रु में बेची जाती है।

8. चंदू ने एक घड़ी अंकित मूल्य पर 20 % का बट्टा प्राप्त करने के बाद खरीदी और उसे अंकित मूल्य पर बेच दिया। इस सौदे पर चंदू को प्राप्त लाभ प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

9. कोई महिला दुकानदार अपने ग्राहकों को अंकित मूल्य पर 10 % का बट्टा देती है और फिर भी उसे 25 % का लाभ होता है। महिला दुकानदार के लिए उस पंखे का क्रय मूल्य ज्ञात कीजिए जिसका अंकित मूल्य 1250 रु है।

10. जैसमीन अपने माल के अंकित मूल्य पर 4 % का बट्टा देती है और फिर भी 20 % का लाभ अर्जित करती है। जैसमीन के लिए उस कमीज़ का क्रय मूल्य ज्ञात कीजिए जिसका अंकित मूल्य 850 रु है।

11. एक व्यापारी उस वस्तु का मूल्य क्या अंकित करे, जो उसे 918 रु में प्राप्त हुई है, ताकि 15 % का बट्टा देने के बाद भी उसे 20 % का लाभ हो?

12. सुनीता उस साड़ी का क्या मूल्य अंकित करे, जो उसे 2200 रु में प्राप्त हुई है, ताकि 12% का बट्टा देने के बाद भी उसे 26 % का लाभ हो?

13. एक साइकिल विक्रेता साइकिलों के अंकित मूल्य पर 25 % का बट्टा देता है और फिर भी 20 % का लाभ अर्जित करता है। यदि उसे एक साइकिल बेचने पर 360 रु का लाभ हो, तो उस साइकिल का अंकित मूल्य ज्ञात कीजिए।
[*संकेत :* पहले साइकिल का क्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।]

14. असलम जूतों के एक जोड़े का मूल्य क्या अंकित करे, जो उसने 1200 रु में खरीदा है, ताकि 16 % का बट्टा देने के बाद भी उसे 12 % का लाभ हो?

15. एक व्यापारी वैज्ञानिक यंत्रों के अंकित मूल्य पर 20 % का बट्टा देने के बाद भी 25 % लाभ अर्जित करता है। जिस यंत्र की बिक्री पर उसे 150 रु का लाभ हुआ हो, उस यंत्र का अंकित मूल्य ज्ञात कीजिए।

याद रखने योग्य बातें

1. लाभ की स्थिति में,

$$\text{वि.मू.} = \text{क्र.मू.} \times \left(\frac{100 + \text{लाभ } \%}{100}\right)$$

$$\text{क्र.मू.} = \frac{100 \times \text{वि.मू.}}{100 + \text{लाभ } \%}$$

2. हानि की स्थिति में,

$$\text{वि.मू.} = \text{क्र.मू.} \times \left(\frac{100 - \text{हानि } \%}{100}\right)$$

$$\text{क्र.मू.} = \frac{100 \times \text{वि.मू.}}{100 - \text{हानि } \%}$$

3. बट्टा प्राय: अंकित मूल्य के प्रतिशत के रूप में व्यक्त किया जाता है।

4. बट्टा = अंकित मूल्य - विक्रय मूल्य

5. बट्टे की दर = बट्टा % = $\frac{\text{बट्टा}}{\text{अंकित मूल्य}} \times 100$

6. विक्रय मूल्य = अंकित मूल्य × $\left(\frac{100 - \text{बट्टा } \%}{100}\right)$

7. अंकित मूल्य = $\frac{100 \times \text{विक्रय मूल्य}}{100 - \text{बट्टा } \%}$

अध्याय

चक्रवृद्धि ब्याज

5.1 भूमिका

कक्षा VII में, आप साधारण ब्याज के बारे में पढ़ चुके हैं। आपको याद होगा कि साधारण ब्याज की स्थिति में, ब्याज संपूर्ण ऋण अवधि में केवल प्रारंभिक उधार लिए गए धन (मूलधन) पर ही लिया जाता है। परंतु दैनिक जीवन के क्रियाकलापों में, साधारण ब्याज बहुत कम स्थितियों में ही लिया/दिया जाता है। बैंकों, डाकघरों, बीमा निगमों एवं अन्य वित्तीय संस्थाओं द्वारा लिया/दिया जाने वाला ब्याज साधारण ब्याज नहीं होता है। इन स्थितियों में, एक निर्धारित समय काल (अवधि) के बाद देय ब्याज और अधिक ब्याज अर्जित करने के लिए पुनः निवेशित कर दिया जाता है। इस प्रकार, मूलधन में ब्याज को जोड़कर *नया* मूलधन बना दिया जाता है, जिसे अगली समय अवधि के लिए पुनः निवेशित किया जा सकता है। इस प्रक्रिया को अनेक समय अवधियों के लिए दोहराया जा सकता है। प्रारंभिक मूलधन और अंतिम समय अवधि के अंत में प्राप्त होने वाले मिश्रधन का अंतर उस समय अवधि के लिए प्रारंभिक मूलधन पर *चक्रवृद्धि ब्याज* (*compound interest*) कहलाता है।

वह समय अवधि, जिसके बाद ब्याज नया मूलधन बनाने के लिए प्रत्येक बार जोड़ा जाता है, *रूपांतरण अवधि* (*conversion period*) कहलाती है।

यह अवधि एक वर्ष, छः मास, तीन मास या एक मास हो सकती है। इन स्थितियों में, क्रमशः यह कहा जाता है कि ब्याज वार्षिक, अर्धवार्षिक, त्रैमासिक या मासिक *संयोजित* (*compounded*) है।

इस अध्याय में, हम चक्रवृद्धि ब्याज की संकल्पना तथा मिश्रधन और चक्रवृद्धि ब्याज को परिकलित करने की विधियों की चर्चा करेंगे। इसके लिए, हम केवल उन्हीं स्थितियों को लेंगे जिनमें ब्याज *वार्षिक संयोजित* होता है।

5.2 चक्रवृद्धि ब्याज

चक्रवृद्धि ब्याज की संकल्पना को समझने के लिए, पहले हम साधारण ब्याज का एक उदाहरण लेते हैं। मान लें कि 5000 रु की एक राशि 8 % वार्षिक साधारण ब्याज की दर से 2 वर्ष के लिए उधार ली जाती है। इस राशि पर कुल ब्याज कितना होगा?

हम जानते हैं कि

साधारण ब्याज $= \dfrac{P \times R \times T}{100}$,

जहाँ P मूलधन है, R प्रतिशत वार्षिक ब्याज की दर है तथा T वर्षों की संख्या है। इस प्रकार,

साधारण ब्याज $= \dfrac{5000 \times 8 \times 2}{100}$ रु $= 800$ रु

आइए, अब निम्नलिखित स्थिति पर विचार करें :

हर्ष किसी वित्त कंपनी से 8 % वार्षिक की दर से एक वर्ष के लिए 5000 रु उधार लेता है। तब, एक वर्ष के अंत में, हर्ष द्वारा उस कंपनी को दी जाने वाली राशि होगी :

(i) उधार ली गई राशि (मूलधन) = 5000 रु

और (ii) 5000 रु पर 8 % वार्षिक की दर से एक वर्ष का ब्याज

$= \dfrac{5000 \times 8 \times 1}{100}$ रु $= 400$ रु

इस प्रकार, हर्ष द्वारा कंपनी को देय राशि = 5000 रु + 400 रु = 5400 रु

मान लीजिए, किसी कारणवश, हर्ष कंपनी को यह राशि देने में असमर्थ है। स्पष्ट है कि कंपनी अब उससे 5400 रु पर ब्याज लेगी। इस प्रकार, दूसरे वर्ष के लिए मूलधन 5400 रु होगा, जो पहले वर्ष के अंत में मिश्रधन है।

दूसरे वर्ष के अंत में, हर्ष द्वारा उस कंपनी को दी जाने वाली राशि होगी :

(i) नया मूलधन = 5400 रु

और (ii) 5400 रु पर 8 % वार्षिक की दर से एक वर्ष का ब्याज

$= \dfrac{5400 \times 8 \times 1}{100}$ रु $= 432$ रु

इस प्रकार, अब हर्ष द्वारा कंपनी को देय राशि = 5400 रु + 432 रु = 5832 रु

अतः, कंपनी को देय कुल ब्याज = 5832 रु − 5000 रु = 832 रु

उपर्युक्त प्रकार से परिकलित किया ब्याज *चक्रवृद्धि ब्याज* (*compound interest*) कहलाता है। इस स्थिति में, 832 रु, मूलधन 5000 रु पर 8 % वार्षिक की दर से 2 वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज है।

ध्यान दीजिए कि 5000 रु पर उसी समय अवधि (2 वर्ष) के लिए तथा उसी ब्याज की दर (8 %) से साधारण ब्याज 800 रु था, जबकि चक्रवृद्धि ब्याज 832 रु है। अर्थात् चक्रवृद्धि ब्याज, साधारण ब्याज से (832 – 800) रु या 32 रु अधिक है। यह अंतर इस कारण है कि चक्रवृद्धि ब्याज की स्थिति में, हमने पहले वर्ष के साधारण ब्याज 400 रु को मूलधन 5000 रु में जोड़कर (5000 + 400) रु, अर्थात् 5400 रु को दूसरे वर्ष के लिए *नया मूलधन* मान लिया था। दूसरे शब्दों में, चक्रवृद्धि ब्याज की स्थिति में, दूसरे वर्ष के लिए ब्याज पहले वर्ष के ब्याज पर भी लिया गया है।

आप इस तथ्य की जाँच कर सकते हैं कि चक्रवृद्धि ब्याज और साधारण ब्याज का अंतर 32 रु पहले वर्ष के ब्याज 400 रु पर एक वर्ष के ब्याज के बराबर है।

टिप्पणियाँ :

1. साधारण ब्याज और चक्रवृद्धि ब्याज में मुख्य अंतर यह है कि साधारण ब्याज की स्थिति में मूलधन सदैव अचर रहता है, जबकि चक्रवृद्धि ब्याज की स्थिति में वह विभिन्न समय अवधियों बाद बदलता रहता है।
2. चक्रवृद्धि ब्याज की स्थिति में, दूसरे वर्ष के लिए मूलधन पहले वर्ष के मूलधन और उस पर पहले वर्ष के साधारण ब्याज के योग के बराबर होता है। इसी प्रकार, तीसरे वर्ष के लिए मूलधन दूसरे वर्ष के मूलधन और उस पर दूसरे वर्ष के साधारण ब्याज के योग के बराबर होता है, इत्यादि।
3. किसी दिए हुए मूलधन, दर और समय के लिए, प्रायः चक्रवृद्धि ब्याज साधारण ब्याज से अधिक होता है। पहले वर्ष के लिए साधारण ब्याज और चक्रवृद्धि ब्याज बराबर होते हैं (यदि ब्याज वार्षिक परिकलित किया जाता है)।
4. उपर्युक्त उदाहरण में, ब्याज वार्षिक रूप से परिकलित किया गया था। जैसा कि पहले भी बताया जा चुका है, इसके लिए कहा जाता है कि ब्याज *प्रति वर्ष* (*या वार्षिक*) *संयोजित* (*compounded annually*) है।
5. इसी प्रकार की प्रक्रिया एक दी हुई राशि पर 2 वर्षों से अधिक के लिए चक्रवृद्धि ब्याज परिकलित करने के लिए की जाती है।

आइए, कुछ उदाहरणों पर विचार करें :

उदाहरण 1 : 8000 रु पर 2 वर्ष का 6 % वार्षिक की दर से चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।

हल : आइए पहले 100 रु पर 2 वर्ष का 6 % वार्षिक की दर से चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात करें।

100 रु पर 1 वर्ष का 6 % वार्षिक की दर से ब्याज = 6 रु

इस प्रकार, पहले वर्ष के लिए,

मूलधन = 100 रु

ब्याज = 6 रु

$\therefore$ मिश्रधन = 106 रु

यह मिश्रधन दूसरे वर्ष के लिए नया मूलधन बन जाता है।

दूसरे वर्ष के लिए,

मूलधन = 106 रु

ब्याज = $\frac{106 \times 6 \times 1}{100}$ रु = 6.36 रु

$\therefore$ मिश्रधन = 106 रु + 6.36 रु = 112.36 रु

इस प्रकार, चक्रवृद्धि ब्याज = 112.36 रु - 100 रु

= 12.36 रु

अब, 100 रु पर चक्रवृद्धि ब्याज = 12.36 रु

$\therefore$ 1 रु पर चक्रवृद्धि ब्याज = $\frac{12.36}{100}$ रु

अतः, 8000 रु पर चक्रवृद्धि ब्याज = $\frac{12.36 \times 8000}{100}$ रु = 988.80 रु

उदाहरण 2 : 20000 रु पर 3 वर्षों के लिए 10 % वार्षिक की दर से मिश्रधन और चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।

हल : पहले हम 100 रु पर 3 वर्ष का 10 % वार्षिक की दर से चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात करते हैं।

100 रु पर 10 % की दर से 1 वर्ष का ब्याज = 10 रु

इस प्रकार, पहले वर्ष के अंत में मिश्रधन = (100 + 10) रु = 110 रु

यह दूसरे वर्ष के लिए मूलधन बन जाता है।

$\therefore$ दूसरे वर्ष के लिए ब्याज $= \left(\frac{110 \times 10 \times 1}{100}\right) =$ 11 रु

$\therefore$ दूसरे वर्ष के अंत में मिश्रधन = 110 रु + 11 रु = 121 रु

पुनः, यह तीसरे वर्ष के लिए मूलधन बन जाता है।

$\therefore$ तीसरे वर्ष के लिए ब्याज $= \left(\frac{121 \times 10 \times 1}{100}\right)$ रु = 12.10 रु

$\therefore$ तीसरे वर्ष के अंत में मिश्रधन = 121 रु + 12.10 रु = 133.10 रु

$\therefore$ चक्रवृद्धि ब्याज = 133.10 रु – 100 रु = 33.10 रु

अब, 100 रु पर मिश्रधन = 133.10 रु

$\therefore$ 1 रु पर मिश्रधन $= \frac{133.10}{100}$ रु

अतः, 20000 रु पर मिश्रधन $= \frac{133.10}{100} \times 20000$ रु = 26620 रु

चक्रवृद्धि ब्याज = मिश्रधन – मूलधन

= 26620 रु – 20000 रु = 6620 रु

इस प्रकार, वांछित मिश्रधन 26620 रु है तथा चक्रवृद्धि ब्याज 6620 रु है।

ध्यान दीजिए कि उपर्युक्त उदाहरणों में, हमने पहले 100 रु पर मिश्रधन/चक्रवृद्धि ब्याज परिकलित किया है और फिर दिए हुए मूलधन पर मिश्रधन/चक्रवृद्धि ब्याज परकलित करने के लिए *ऐकिक विधि* (*Unitary Method*) का प्रयोग किया है। हम किसी दी हुई राशि के लिए मिश्रधन/चक्रवृद्धि ब्याज सीधे भी ज्ञात कर सकते हैं, जैसा कि अगले उदाहरण में दर्शाया गया है।

उदाहरण 3 : सुरभि ने एक रेफ्रीजरेटर खरीदने के लिए एक वित्त कंपनी से 12000 रु उधार लिए। यदि ब्याज की दर 5 % वार्षिक है तथा ब्याज प्रति वर्ष संयोजित होता है, तो सुरभि द्वारा 3 वर्ष के बाद कंपनी को दिया जाने वाला चक्रवृद्धि ब्याज परिकलित कीजिए।

हल : पहले वर्ष के लिए मूलधन = 12000 रु

$\therefore$ पहले वर्ष के लिए ब्याज $= \frac{12000 \times 5 \times 1}{100}$ रु = 600 रु

$\therefore$ पहले वर्ष के अंत में मिश्रधन = 12000 रु + 600 रु = 12600 रु

जो दूसरे वर्ष के लिए मूलधन है।

अब, दूसरे वर्ष के लिए ब्याज $= \left(\frac{12600 \times 5 \times 1}{100}\right)$ रु = 630 रु

$\therefore$ दूसरे वर्ष के अंत में मिश्रधन = 12600 रु + 630 रु = 13230 रु, जो तीसरे वर्ष के लिए मूलधन है।

अब, तीसरे वर्ष के लिए ब्याज $= \left(\frac{13230 \times 5 \times 1}{100}\right)$ रु = 661.50 रु

$\therefore$ तीसरे वर्ष के अंत में मिश्रधन = 13230 रु + 661.50 रु = 13891.50 रु

$\therefore$ तीसरे वर्ष के बाद चक्रवृद्धि ब्याज = तीसरे वर्ष के अंत में मिश्रधन − प्रारंभिक मूलधन

= 13891.50 रु + 12000 रु = 1891.50 रु

टिप्पणी : तीन वर्ष के बाद चक्रवृद्धि ब्याज पहले, दूसरे एवं तीसरे वर्षों के ब्याजों को जोड़कर (600 रु + 630 रु + 661.50 रु) भी प्राप्त किया जा सकता है।

प्रश्नावली 5.1

1. निम्नलिखित के लिए चक्रवृद्धि ब्याज परिकलित कीजिए:

   (i) 1500 रु पर 2 वर्ष के लिए 6 % वार्षिक की दर से।

   (ii) 2860 रु पर 2 वर्ष के लिए 5 % वार्षिक की दर से।

   (iii) 3000 रु पर 2 वर्ष के लिए 5 % वार्षिक की दर से।

   (iv) 5000 रु पर 2 वर्ष के लिए 10 % वार्षिक की दर से।

   (v) 8500 रु पर 2 वर्ष के लिए 8 % वार्षिक की दर से।

2. 8000 रु पर $12\frac{1}{2}\%$ वार्षिक की दर से 2 वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।

3. 10000 रु पर 10 % वार्षिक की दर से 3 वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए, जबकि ब्याज प्रति वर्ष संयोजित होता है।

4. सलमा ने किसी संस्था में 9.5 % वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 2 वर्ष के लिए 6250 रु जमा किए। 2 वर्षों के बाद उसको प्राप्त होने वाला मिश्रधन परिकलित कीजिए।

5. 28000 रु पर 5 % वार्षिक की दर से 3 वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए, जबकि ब्याज प्रति वर्ष संयोजित होता है।

6. 15625 रु की एक राशि पर 4 % वार्षिक की दर से 3 वर्ष का मिश्रधन और चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए, जबकि ब्याज प्रति वर्ष संयोजित होता है।

7. वासुदेवन ने 8000 रु की एक राशि 9% वार्षिक ब्याज की दर से निवेशित की। 3 वर्षों के बाद उसको प्राप्त होने वाला मिश्रधन ज्ञात कीजिए, जबकि ब्याज प्रति वर्ष संयोजित होता है।

8. दलजीत को एक वित्तीय कंपनी से 40000 रु का एक ऋण प्राप्त हुआ। यदि ब्याज की दर प्रति वर्ष संयोजित 7 % वार्षिक है, तो दलजीत द्वारा 2 वर्षों के बाद देय चक्रवृद्धि ब्याज परिकलित कीजिए।

9. आरिफ ने, अपनी दुकान को नया स्वरूप देने के लिए, किसी बैंक से 8000 रु का एक ऋण लिया। यदि ब्याज की दर प्रति वर्ष संयोजित 5 % वार्षिक है, तो तीन वर्षों के बाद आरिफ द्वारा देय चक्रवृद्धि ब्याज परिकलित कीजिए।

10. अनिल ने अपनी दुग्धशाला में एक हैंडपंप लगवाने के लिए 9600 रु की एक राशि उधार ली। यदि ब्याज की दर प्रति वर्ष संयोजित $5\frac{1}{2}\%$ वार्षिक है, तो तीन वर्षों के बाद अनिल द्वारा देय चक्रवृद्धि ब्याज निर्धारित कीजिए।

11. मारिया 93750 रु की राशि 3 वर्षों के लिए 9.6 % वार्षिक की दर से निवेशित करती है, जबकि ब्याज प्रति वर्ष संयोजित होता है। परिकलित कीजिए :

    (i) दूसरे वर्ष के अंत में उसे प्राप्त होने वाला मिश्रधन।

    (ii) तीसरे वर्ष के लिए ब्याज।

5.3 चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात करने के लिए सूत्र

आइए, पिछले अनुच्छेद में दिए गए उदाहरणों 1 और 2 पर पुनः विचार करें। आप देख सकते हैं कि जैसे-जैसे समय अवधि बढ़ती है, वैसे-वैसे ब्याज परिकलित करने की प्रक्रिया अधिक लंबी होती जाती है तथा इसमें समय भी अधिक लगता है। अतः हमें चक्रवृद्धि ब्याज परिकलित करने के लिए कोई सूत्र निर्धारित करने का प्रयत्न करना चाहिए।

उदाहरण 1 में, हम मिश्रधन का परिकलन निम्न प्रकार से भी कर सकते हैं :

पहले वर्ष के लिए ब्याज $= \left(\frac{8000 \times 6 \times 1}{100}\right)$ रु

$\therefore$ पहले वर्ष के अंत में मिश्रधन $= 8000$ रु $+ \left(\frac{8000 \times 6 \times 1}{100}\right)$ रु

$$= 8000\left(1 + \frac{6}{100}\right) \text{ रु} \quad (1)$$

परंतु, मिश्रधन (1) दूसरे वर्ष के लिए मूलधन हो जाता है।

$\therefore$ दूसरे वर्ष के लिए ब्याज $= 8000\left(1 + \frac{6}{100}\right) \times \frac{6 \times 1}{100}$ रु

$\therefore$ दूसरे वर्ष के अंत में मिश्रधन $= \left[8000\left(1 + \frac{6}{100}\right) + 8000\left(1 + \frac{6}{100}\right) \times \frac{6}{100}\right]$ रु

$$= 8000\left(1 + \frac{6}{100}\right)\left(1 + \frac{6}{100}\right) \text{ रु}$$

$$= 8000\left(1 + \frac{6}{100}\right)^2 \text{ रु} \quad (2)$$

उदाहरण 2 में, हम मिश्रधन का परिकलन निम्न प्रकार भी कर सकते हैं:

पहले वर्ष के लिए ब्याज $= \left(\frac{20000 \times 10 \times 1}{100}\right)$ रु

$\therefore$ पहले वर्ष के अंत में मिश्रधन $= \left(20000 + \frac{20000 \times 10 \times 1}{100}\right)$ रु

$$= 20000\left(1 + \frac{10}{100}\right) \text{ रु} \quad (3)$$

परंतु, मिश्रधन (3) दूसरे वर्ष के लिए मूलधन बन जाता है।

$\therefore$ दूसरे वर्ष के लिए ब्याज $= 20000\left(1 + \frac{10}{100}\right) \times \frac{10 \times 1}{100}$ रु

$\therefore$ दूसरे वर्ष के अंत में मिश्रधन $= \left[20000\left(1 + \frac{10}{100}\right) + 20000 \times \left(1 + \frac{10}{100}\right) \times \frac{10}{100}\right]$ रु

$$= 20000\left(1 + \frac{10}{100}\right)\left(1 + \frac{10}{100}\right) \text{ रु}$$

$$= 20000 \left(1 + \frac{10}{100}\right)^2 \text{ रु} \qquad (4)$$

परंतु, मिश्रधन (4) तीसरे वर्ष के लिए मूलधन बन जाता है।

$\therefore$ तीसरे वर्ष के लिए ब्याज $= 20000 \left(1 + \frac{10}{100}\right)^2 \times \frac{10}{100}$ रु

और तीसरे वर्ष के अंत में मिश्रधन $= \left[20000 \left(1 + \frac{10}{100}\right)^2 + 20000 \left(1 + \frac{10}{100}\right)^2 \times \frac{10}{100}\right.$ रु

$$= 20000 \left(1 + \frac{10}{100}\right)^2 \left(1 + \frac{10}{100}\right) \text{ रु}$$

$$= 20000 \left(1 + \frac{10}{100}\right)^3 \text{ रु} \qquad (5)$$

ध्यान दीजिए कि

उदाहरण 1 में, ब्याज की दर = 6 %, वर्षों की संख्या = 2, मूलधन = 8000 रु तथा मिश्रधन A निम्न से प्राप्त होता है :

$$A = 8000\left(1 + \frac{6}{100}\right)^2 \text{ रु} \qquad \text{[उपर्युक्त (2) से]}$$

उदाहरण 2 में, ब्याज की दर = 10%, वर्षों की संख्या = 3, मूलधन = 20000 रु तथा मिश्रधन A निम्न से प्राप्त होता है :

$$A = 20000\left(1 + \frac{10}{100}\right)^3 \text{ रु.} \qquad \text{[उपर्युक्त (5) से]}$$

उपर्युक्त चर्चा के आधार पर, हम कह सकते हैं कि

$$A = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n \qquad (I)$$

जहाँ A अंतिम समय अवधि (अर्थात् वर्ष) के बाद का मिश्रधन है, P मूलधन, r प्रतिशत वार्षिक ब्याज दर तथा n वर्षों की संख्या है। चक्रवृद्धि ब्याज की स्थिति में, सूत्र (I) के प्रयोग से हम मिश्रधन प्राप्त कर सकते हैं। अब चक्रवृद्धि ब्याज निम्न प्रकार निर्धारित किया जा सकता है :

चक्रवृद्धि ब्याज $= A - P$

$$= P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n - P \qquad \text{[(I) का प्रयोग करने पर]}$$

$$= P\left[\left(1+\frac{r}{100}\right)^n - 1\right] \qquad \text{(II)}$$

उपर्युक्त सूत्रों का प्रयोग स्पष्ट करने के लिए, हम कुछ और उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 4 : 6000 रु 2 वर्ष के लिए 5 % वार्षिक ब्याज की दर से उधार दिए गए, जबकि ब्याज प्रति वर्ष संयोजित होता है। इस राशि पर प्राप्त मिश्रधन, ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ, $P = 6000$ रु, $r = 5$ और $n = 2$ है।

मिश्रधन परिकलित करने के लिए, सूत्र (I) का प्रयोग करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n = 6000\left(1+\frac{5}{100}\right)^2 \text{ रु}$$

$$= 6000\left(\frac{105}{100}\times\frac{105}{100}\right) \text{ रु}$$

$$= \left(6000\times\frac{21}{20}\times\frac{21}{20}\right) \text{ रु}$$

$$= 6615 \text{ रु}$$

अतः, वांछित मिश्रधन 6615 रु है।

इस उदाहरण में, हमने स्पष्ट रूप से यह कहा है कि ब्याज प्रति वर्ष संयोजित है। परंतु यदि ऐसा कुछ भी न कहा जाए, तो समझा जाता है कि ब्याज प्रति वर्ष संयोजित होता है।

उदाहरण 5 : 25600 रु पर 6.25 % वार्षिक की दर से 2 वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।

हल : हमें ज्ञात है : $P = 25600$ रु, $r = 6.25$ और $n = 2$

[सूत्र (II) से]

$$= \left[25600\left\{\left(\frac{17}{16}\right)\left(\frac{17}{16}\right)-1\right\}\right] \text{ रु}$$

$$= \left[25600\,\frac{(289-256)}{256}\right] \text{ रु}$$

$$= \frac{25600 \times 33}{256} \text{ रु} = 3300 \text{ रु}$$

उदाहरण 6 : 16000 रु पर 3 वर्ष का मिश्रधन और चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए, जबकि वार्षिक ब्याज की दर 2% है।

हल : यहाँ P = 16000 रु, $n = 3$ और $r = 2$ है।

∴ मिश्रधन $= 16000\left(1 - \frac{2}{100}\right)^3$ रु [सूत्र (I) से]

$$= 16000\left(\frac{102}{100}\right)\left(\frac{102}{100}\right)\left(\frac{102}{100}\right) \text{ रु}$$

$$= 16000\left(\frac{51}{50}\right)\left(\frac{51}{50}\right)\left(\frac{51}{50}\right) \text{ रु} = 16979.33 \text{ रु (लगभग)}$$

तथा चक्रवृद्धि ब्याज = (16979.33 − 16000) रु = 979.33 रु (लगभग)

उदाहरण 7 : किसी धनराशि पर $6\frac{1}{4}$ % वार्षिक ब्याज की दर से 3 वर्ष का साधारण ब्याज 2400 रु है। इसी धनराशि पर इसी ब्याज की दर से इसी समय अवधि का चक्रवृद्धि ब्याज क्या होगा?

हल : मान लीजिए धनराशि P रु है। तब,

$$\frac{P \times \frac{25}{4} \times 3}{100} = 2400 \qquad \left[\text{सूत्र S.I. } \frac{P \times R \times T}{100} \text{ का प्रयोग करने पर}\right]$$

या $$P = \frac{240000 \times 4}{75} = 12800$$

अब 12800 रु पर $6\frac{1}{4}$ % वार्षिक की दर से 3 वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज

$$= \left[12800\left\{\left(1+\frac{25}{400}\right)^3 - 1\right\}\right] \text{ रु} \qquad \text{[सूत्र (II) से]}$$

$$= \left[12800\left\{\left(1+\frac{1}{16}\right)^3 - 1\right\}\right] \text{ रु}$$

$$= \left[12800\left\{\frac{17}{16}\times\frac{17}{16}\times\frac{17}{16} - 1\right\}\right] \text{ रु}$$

$$= 12800 \left\{\frac{4913}{4096} - 1\right\} \text{ रु}$$

$$= 12800 \left(\frac{817}{4096}\right) \text{ रु} = 2553.13 \text{ रु (लगभग)}$$

उदाहरण 8 : किसी धनराशि पर 10 % वार्षिक की दर से 2 वर्षों के चक्रवृद्धि ब्याज और साधारण ब्याज का अंतर 300 रु है। वह धनराशि ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए व धनराशि P रु है।

10% वार्षिक की दर से P रु पर 2 वर्ष का साधारण ब्याज

$$= \frac{P \times 10 \times 2}{100} \text{ रु.} = \frac{P}{5} \text{ रु} \qquad (1)$$

10% वार्षिक की दर से P रु पर 2 वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज

$$= P\left[\left(1+\frac{10}{100}\right)^2 - 1\right] \text{ रु}$$

$$= P\left[\frac{11}{10}\times\frac{11}{10} - 1\right] \text{ रु}$$

$$= P\left(\frac{121-100}{100}\right) \text{ रु} = \frac{21P}{100} \text{ रु} \qquad (2)$$

दिया है कि चक्रवृद्धि ब्याज – साधारण ब्याज = 300 रु

$$\therefore \quad \frac{21P}{100} - \frac{P}{5} = 300 \qquad \text{[(1) और (2) से]}$$

या $\quad \dfrac{21P-20P}{100} = 300$

या $\quad 21P - 20P = 30000$

या $\quad P = 30000$

अतः, वांछित धनराशि 30000 रु है।

उदाहरण 9 : कोई धनराशि 8 % वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 2 वर्षों में 5832 रु हो जाती है। वह धनराशि ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ A = 5832 रु, $r = 8$ और $n = 2$ है।

मान लीजिए वांछित धनराशि P रु है।

$\therefore \quad 5832 = P\left(1+\frac{8}{100}\right)^2$ [सूत्र (I) से]

या $\quad 5832 = P\left(\frac{108}{100}\right)^2$

या $\quad 5832 = P\left(\frac{27}{25}\right)\left(\frac{27}{25}\right)$

$\therefore \quad P = \frac{5832 \times 25 \times 25}{27 \times 27} = 5000$

अतः, वांछित धनराशि 5000 रु है।

उदाहरण 10 : कितने प्रतिशत चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 1000 रु की धनराशि का 2 वर्षों में मिश्रधन 1102.50 रु हो जाएगा?

हल : मान लीजिए वार्षिक ब्याज की दर r प्रतिशत है।

यहाँ A = 1102.50 रु, P = 1000 रु और $n = 2$ है।

$\therefore \quad 1102.50 = 1000\left(1+\frac{r}{100}\right)^2$ [सूत्र (I) से]

या $\quad \left(1+\frac{r}{100}\right)^2 = \frac{1102.50}{1000}$

या $\quad \left(1+\frac{r}{100}\right)^2 = \frac{441}{400} = \left(\frac{21}{20}\right)^2$

$\therefore \quad 1+\frac{r}{100} = \frac{21}{20}$

या $\quad \frac{r}{100} = \frac{21}{20} - 1 = \frac{1}{20}$

या $\quad r = 5$

अत: वांछित ब्याज की दर 5 % वार्षिक है।

उदाहरण 11 : 1800 रु पर 10 % वार्षिक की दर से किसी समय अवधि के लिए चक्रवृद्धि ब्याज 378 रु है। वह समय अवधि ज्ञात कीजिए।

हल : मूलधन = 1800 रु और चक्रवृद्धि ब्याज = 378 रु।

मान लीजिए वांछित समय अवधि n वर्ष है, तब

मिश्रधन = (1800 + 378) रु = 2178 रु

$\therefore \quad 2178 = 1800\left(1+\frac{10}{100}\right)^n$ [सूत्र (I) से]

या $\quad \left(1+\frac{10}{100}\right)^n = \frac{2178}{1800} = \frac{121}{100} = \left(\frac{11}{10}\right)^2$

या $\quad \left(\frac{11}{10}\right)^n = \left(\frac{11}{10}\right)^2$

या $\quad n = 2$

अत:, वांछित समय अवधि 2 वर्ष है।

प्रश्नावली 5.2

चक्रवृद्धि ब्याज के सूत्रों का प्रयोग करते हुए, प्रश्न 1-5 में, मिश्रधन और चक्रवृद्धि ब्याज परिकलित कीजिए।

1. मूलधन = 4000 रु, दर = 5 % वार्षिक, समय = 2 वर्ष
2. मूलधन = 6000 रु, दर = 10 % वार्षिक, समय = 2 वर्ष
3. मूलधन = 6250 रु, दर = 4 % वार्षिक, समय = 2 वर्ष
4. मूलधन = 20000 रु, दर = 7.5 % वार्षिक, समय = 3 वर्ष
5. मूलधन = 31250 रु, दर = 8 % वार्षिक, समय = 3 वर्ष

6. 25000 रु पर 6 % वार्षिक ब्याज की दर से 3 वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।

7. 6 % वार्षिक ब्याज की दर से 125000 रु का 3 वर्ष के बाद मिश्रधन ज्ञात कीजिए, जबकि ब्याज प्रति वर्ष संयोजित होता है।

8. हेमा ने हमीद को $6\frac{1}{4}$ % वार्षिक ब्याज की दर से चक्रवृद्धि ब्याज पर 40960 रु उधार दिए, 3 वर्षों के बाद हमीद द्वारा हेमा को दिए जाने वाला मिश्रधन ज्ञात कीजिए।

9. चंद्रन ने वर्षा से 3 वर्ष के लिए 10000 रु उधार लिए। यदि ब्याज की दर 10 % वार्षिक हो, जबकि ब्याज प्रति वर्ष संयोजित होता है, तो 3 वर्षों के अंत में चंद्रन द्वारा देय मिश्रधन ज्ञात कीजिए।

10. 32000 रु पर 12 % वार्षिक ब्याज की दर से 3 वर्षों के चक्रवृद्धि ब्याज और साधारण ब्याज का अंतर ज्ञात कीजिए।

11. फातिमा 12 % वार्षिक ब्याज की दर से 3 वर्षों के लिए 12500 रु साधारण ब्याज पर उधार लेती है। राधा यही राशि 10 % वार्षिक की दर से इतनी ही अवधि के लिए चक्रवृद्धि ब्याज पर उधार लेती है, जबकि ब्याज प्रति वर्ष संयोजित होता है। इनमें से कौन अधिक ब्याज देता है और कितना अधिक?

12. मैंने जमशेद से 6 % वार्षिक साधारण ब्याज की दर से 2 वर्ष के लिए 12000 रु उधार लिए। यदि जमशेद साधारण ब्याज के स्थान पर 6 % वार्षिक चक्रवृद्धि लेता है, तो मुझे उसे कितनी अतिरिक्त राशि देनी पड़ेगी?

13. किसी धनराशि पर $6\frac{1}{2}$ % वार्षिक की दर से 2 वर्षों का साधारण ब्याज 5200 रु है। इसी राशि पर इसी ब्याज की दर से इसी समय के लिए चक्रवृद्धि ब्याज कितना होगा?

14. उस राशि पर 5 % वार्षिक की दर से 3 वर्षों का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए, जो 3 वर्षों में 5 % वार्षिक की दर से 1200 रु साधारण ब्याज देती है।

15. किसी धनराशि पर 7.5 % वार्षिक की दर से 2 वर्षों के चक्रवृद्धि ब्याज और साधारण ब्याज का अंतर 360 रु है। वह धनराशि ज्ञात कीजिए।

16. किसी धनराशि पर $6\frac{2}{3}$ % वार्षिक की दर से 3 वर्षों के साधारण ब्याज और चक्रवृद्धि ब्याज का अंतर 46 रु है। वह धनराशि ज्ञात कीजिए।

17. कोई धनराशि प्रति वर्ष संयोजित 2 % वार्षिक ब्याज की दर से 2 वर्षों में 10404 रु हो जाती है। वह धनराशि ज्ञात कीजिए।

18. किसी धनराशि का प्रति वर्ष संयोजित 6.5 % वार्षिक ब्याज की दर से 2 वर्षों में मिश्रधन 453690 रु हो जाता है। वह धनराशि ज्ञात कीजिए।

19. किस धनराशि का $6\frac{3}{4}$% वार्षिक ब्याज की दर से दो वर्षों में मिश्रधन 45582.25 रु हो जाएगा, जबकि ब्याज प्रति वर्ष संयोजित होता है?

20. किस प्रतिशत वार्षिक ब्याज की दर से 4000 रु पर 2 वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज 410 रु होगा?

21. कितने समय में 1600 रु की धनराशि का 5 % वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से मिश्रधन 1852.20 रु हो जाएगा?

22. रेखा ने 5 % वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 12000 रु की एक राशि निवेशित की। उसे n वर्षों के बाद 13230 रु की राशि प्राप्त हुई। n का मान ज्ञात कीजिए।

याद रखने योग्य बातें

1. यदि संपूर्ण ऋण अवधि में मूलधन एक ही रहे, तो उस मूलधन पर परिकलित ब्याज साधारण ब्याज कहलाता है।
2. वह समय अवधि जिसके बाद मूलधन में ब्याज जोड़कर नया मूलधन बनाया जाता है, रूपांतरण अवधि कहलाती है तथा इस प्रकार परिकलित ब्याज चक्रवृद्धि ब्याज कहलाता है।
3. यदि रूपांतरण अवधि एक वर्ष हो, तो यह कहा जाता है कि ब्याज प्रतिवर्ष संयोजित है।
4. साधारण ब्याज और चक्रवृद्धि ब्याज में मुख्य अंतर यह है कि साधारण ब्याज की स्थिति में मूलधन एक ही (अचर) रहता है, जबकि चक्रवृद्धि ब्याज की स्थिति में मूलधन प्रत्येक अवधि के बाद बदलता रहता है।
5. $$A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$$

   चक्रवृद्धि ब्याज $= A - P$

   $$= P\left[\left(1+\frac{r}{100}\right)^n - 1\right]$$

   जहाँ A मिश्रधन, P मूलधन, r प्रतिशत प्रति रूपांतरण अवधि ब्याज की दर तथा n रूपांतरण अवधियों की संख्या है।

—— अतीत के झरोखे से ——

व्यावहारिक या व्यापारिक गणित का इतिहास उतना ही पुराना है जितना मानव सभ्यता का। 19वीं शताब्दी में, मेसोपोटामिया में लगभग आधे मिलियन मिट्टी के (मृत्तिका) शिलालेख खोदकर निकाले गए थे। इनमें से लगभग तीन सौ शिलालेख केवल गणित से संबंधित हैं। मुख्यतः इन्हीं शिलालेखों के माध्यम से ही, हम बेबीलोन (सुमेरियन भी सम्मिलित है) की प्राचीनतम ज्ञात मानव सभ्यता के व्यापारिक क्रियाकलापों के बारे में जानकारी प्राप्त कर पाए हैं।

इन शिलालेखों में से लगभग दो सौ शिलालेख शुद्धता *सारणी* शिलालेख हैं जिनमें गुणनों, व्युत्क्रमों, वर्गों, घनों एवं घातांकियों (exponentials) की सारणियाँ दी हुई हैं। विशिष्ट रूप से, हमें ऐसे शिलालेख प्राप्त होते हैं जिनमें $n = 1, 2, ..., 10$ तथा $a = 9, 16, ..., 100, ..., 225$ के लिए, a^n की सारणियाँ दी हुई हैं। ऐसे प्रमाण मिलते हें कि इन शिलालेखों का प्रयोग साधारण और चक्रवृद्धि ब्याजों के परिकलनों में किया जाता था। 1700 ईसा पूर्व के एक शिलालेख (इस समय फ्रांस में *लूव्र* (*Louvre*) के म्यूजियम में रखी है) में एक समस्या इस प्रकार (यहाँ प्रचलित वर्तमान संकेतन में व्यक्त) दी हुई है: *ज्ञात कीजिए कि किसी धनराशि को 20 % चक्रवृद्धि ब्याज की दर से स्वयं का दुगुना होने के लिए कितना समय लगेगा।* इसको हल करने के लिए, आपको ऐसा n ज्ञात करना होगा कि $P\left(1+\frac{20}{100}\right)^n = 2P$ अथवा $(1.2)^n = 2$ हो। शिलालेख से यह ज्ञात किया गया कि $(1.2)^3$, अर्थात् $1.728 < 2$ है तथा $(1.2)^4$, अर्थात् $2.0736 > 2$ है। फिर उन्होंने 3 और 4 के बीच n का मान अंतर्वेशित (interpolate) किया (अर्थात् इस समस्या को हल किया कि यदि 1.728 और 2.0736 क्रमशः 3 और 4 के संगत हैं तो 2 के संगत कौन सा मान होगा)।

बाद की अधिकांशतः सभी सभ्यताओं में साधारण और चक्रवृद्धि ब्याजों की संकल्पनाएँ मिलती हैं। यूनानी, रोमन, इटेलियन, ब्रिटिश एवं यहूदी सभी ने ब्याज की चर्चा की। 16वीं और 17वीं शताब्दियों की अंकगणित की सभी पुस्तकों में इस संकल्पना को विशिष्ट स्थान दिया गया। इनमें से अनेकों पुस्तकों में, चक्रवृद्धि ब्याज परिकलित करने के लिए सारणियाँ दी हुई हैं।

भारत में भी ब्याज की संकल्पना का ज्ञान सूत्र काल (Sutra period), अर्थात्, ईसा से कुछ वर्षों पूर्व था। *महावीर* (850) और *भास्कर* (1150) ने ब्याज पर अनेक ऐसी समस्याएँ दी हैं जो यह दर्शाती हैं कि ब्याज प्रतिशत के आधार पर परिकलित किया जाता था।

16वीं शताब्दी और उसके बाद की अंकगणित की सभी पुस्तकों में लाभ और हानि (Profit and Loss) के विषय की चर्चा की गई है। यह वाक्यांश इटली से प्रारंभ हुआ तथा लेटिन, जर्मन, पुर्तगाली एवं फ्रांसीसी भाषाओं में क्रमित अनुवादों के बाद अंग्रेजी लेखकों तक हानि और लाभ (Loss and Gain) के रूप में पहुँचा।

बट्टे की संकल्पना *कमीशन* और *दलाली* से प्रारंभ हुई जो माल की बिक्री और खरीद के मध्य में बीच वाला व्यक्ति (दलाल) लिया करता था। (i) भुगतान राशि में की गई कमी यदि वह राशि देय तिथि से पहले अदा कर दी जाए तथा (ii) बिक्री के लिए प्रोत्साहन हेतु अंकित मूल्य में की गई कमी (दी गई छूट) के रूपों में बट्टे की अवधारणा एक आधुनिक (हाल ही की) विशिष्टता है।

अध्याय

बीजीय सर्वसमिकाएँ

6.1 भूमिका

सातवीं कक्षा में आपने कुछ बीजीय सर्वसमिकाओं का अध्ययन किया था। जैसा कि आप जानते हैं, तुल्यता के ऐसे बीजीय संबंध को बीजीय सर्वसमिका कहा जाता है जो संबंध में उपस्थित अक्षर के सभी मानों के लिए सत्य रहता है। आपने निम्नलिखित बीजीय सर्वसमिकाओं का अध्ययन किया था :

A. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

B. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

C. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

याद कीजिए कि किसी बीजय व्यंजक के गुणनखंडन के लिए हम इसे बीजीय व्यंजकों के गुणनफल के रूप में लिख लेते हैं। गुणनफल के प्रत्येक व्यंजक को एक *गुणनखंड* कहा जाता है। गुणनखंड ज्ञात करने की प्रक्रिया *गुणनखंडन* कहलाती है।

इस अध्याय में, हम कुछ और सर्वसमिकाएँ सीखेंगे। बीजीय व्यंजकों के गुणनखंडन में हम इन सर्वसमिकाओं का प्रयोग भी सीखेंगे।

6.2 कुछ अन्य मानक सर्वसमिकाएँ

I. गुणनफल $(x+a)(x+b)$

ऊपर दी गई सर्वसमिका A का प्रयोग कर हम दो समान द्विपदों को गुणा कर सकते हैं। आइए, अब ऐसे दो द्विपदों का गुणनफल निकालें जिनके दूसरे पद भिन्न हों। द्विपदों $x+a$ और $x+b$ को गुणा करने पर, $(x+a)(x+b) = x(x+b) + a(x+b)$

$$= x^2 + xb + ax + ab$$

$$= x^2 + bx + ax + ab \qquad \text{(क्योंकि } xb = bx\text{)}$$

$= x^2 + ax + bx + ab$ (क्योंकि $bx + ax = ax + bx$)

$= x^2 + (a + b)x + ab$ (ax और bx में से x को सार्व गुणनखंड लेने पर)

इस प्रकार, हमें निम्नलिखित सर्वसमिका प्राप्त होती है :

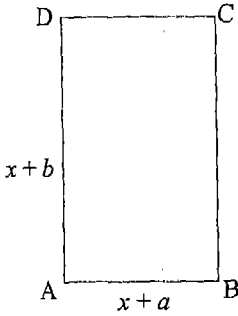
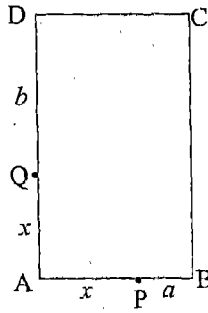
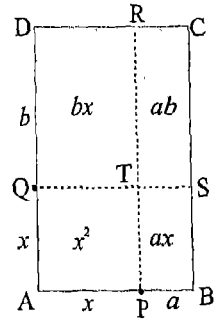
सर्वसमिका I :

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

या

$$(x + a)(x + b) = x^2 + ax + bx + ab$$

क्रियाकलाप 1 : याद कीजिए कि दो द्विपदों $x + a$ और $x + b$ के गुणनफल को भुजाओं $x + a$ और $x + b$ वाले आयत का क्षेत्रफल माना जा सकता है। गत्ते के किसी टुकड़े पर (या पुराने ग्रीटिंग कार्ड पर), भुजाओं $x + a$ और $x + b$ वाला एक आयत ABCD बनाइए [आकृति 6.1 (i)]। स्पष्टत:, आयत ABCD का क्षेत्रफल $(x + a)(x + b)$ है।

AB पर एक बिंदु P इस प्रकार लीजिए कि AP $= x$ हो [आकृति 6.1 (ii)]। AD पर एक बिंदु Q ऐसा लीजिए कि AQ $= x$ हो [आकृति 6.1(ii)]। क्योंकि AB $= x + a$ और AP $= x$ है, अत: PB $= a$ है। पुन:, क्योंकि AD $= x + b$ और AQ $= x$ है, अत: QD $= b$ है [आकृति 6.1(ii)]।

आकृति : 6.1

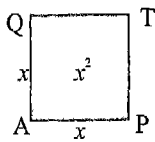
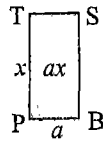
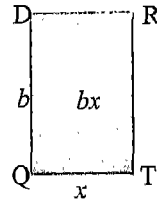
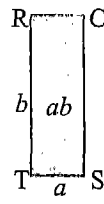
P से AD के समांतर एक रेखाखंड PR खींचिए जो DC से R पर मिले [आकृत 6.1(iii)]। Q से AB के समांतर एक रेखाखंड QS खींचिए जो BC से S पर मिले [आकृति 6.1(iii)]। माना कि PR और QS एक-दूसरे को T पर काटते हैं। ऐसा होने पर आयत निम्नलिखित चार भागों में बँट जाता है :

I. वर्ग APTQ, जिसकी भुजा x है और जिसका क्षेत्रफल x^2 है।

II. आयत PBST, जिसकी भुजाएँ a तथा x हैं और जिसका क्षेत्रफल ax है।

III. आयत QTRD, जिसकी भुजाएँ b तथा x हैं और जिसका क्षेत्रफल bx है।

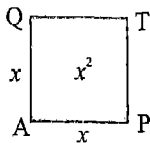
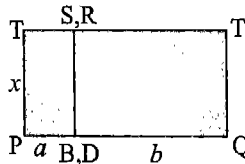
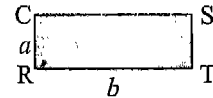
IV. आयत TSCR, जिसकी भुजाएँ a तथा b हैं और जिसका क्षेत्रफल ab है।

रेखाखंडों PR, QT और TS पर काटते हुए इन चारों टुकड़ों को अलग कर लीजिए [आकृति 6.2]।

आकृति : 6.2

क्योंकि पूरी आकृति का क्षेत्रफल वही होगा जो अलग किए गए टुकड़ों का कुल क्षेत्रफल है, अतः आवश्यक है कि

$$(x + a)(x + b) = x^2 + ax + bx + ab$$

इस प्रकार सर्वसमिका I सत्यापित हो जाती है।

क्रियाकलाप 2 : क्रियाकलाप 1 की भाँति आकृति 6.2 में दिखाए गए चार टुकड़े बनाइए। अब आयत DQTR को आकृति 6.3 (ii) में दिखाए गए अनुसार आयत PBST से इस प्रकार सटाकर रखिए कि आयत DQTR की भुजा DR और आयत PBST की भुजा BS एक-दूसरे को ढक लें। ऐसा करने पर यह चार टुकड़े आकृति 6.3 में दिखाए गए तीन टुकड़ों में बदल जाएँगे।

आकृति : 6.3

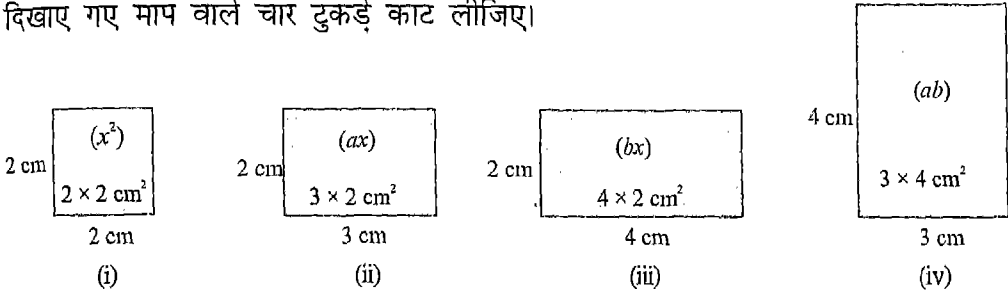
स्पष्ट है कि इन तीन टुकड़ों के क्रमशः क्षेत्रफल x^2, $(a + b)x$ और ab हैं। क्योंकि पूरे टुकड़े का क्षेत्रफल वही होगा जो उन टुकड़ों का कुल क्षेत्रफल है जिन्हें अलग करने के बाद

फिर से जोड़ लिया गया है, अतः आवश्यक है कि

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

इस प्रकार सर्वसमिका I प्रयोग द्वारा सत्यापित हुई।

ऊपर वाले दोनों क्रियाकलापों में, सर्वसमिका I के सत्यापन के लिए हमने पहले पूरा टुकड़ा लिया और तब इसे काटा। जैसा कि नीचे क्रियाकलापों 3 और 4 में दिखाया गया है, हम यह क्रिया विलोम रूप में भी कर सकते हैं।

क्रियाकलाप 3 : तीन संख्याएँ x, a और b लीजिए। माना कि $x = 2$ cm, $a = 3$ cm और $b = 4$ cm है। गत्ते के किसी टुकड़े (या किसी पुराने ग्रीटिंग कार्ड) में से आकृति 6.4 में दिखाए गए माप वाले चार टुकड़े काट लीजिए।

आकृति : 6.4

इन टुकड़ों के क्रमशः क्षेत्रफल इन टुकड़ों के भीतर ही दिखाए गए हैं। चारों टुकड़ों का कुल क्षेत्रफल

$$(2^2 + 3 \times 2 + 4 \times 2 + 3 \times 4) \text{ cm}^2$$

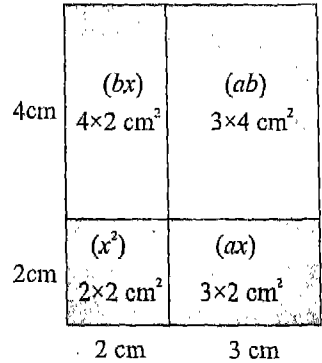
अर्थात् $(x^2 + ax + bx + ab)$ cm^2 है। अब इन टुकड़ों को इस प्रकार जोड़िए कि ये भुजाओं $(2 + 3)$ cm तथा $(2 + 4)$ cm अर्थात् $(x + a)$ cm और $(x + b)$ cm वाला आयत बनाएँ। ऐसा एक विन्यास आकृति 6.5 मे दिखाया गया है।

क्योंकि अलग हुए टुकड़ों का कुल क्षेत्रफल वही है जो आकृति 6.5 में जुड़े हुए टुकड़ों का है, अतः आवश्यक है कि

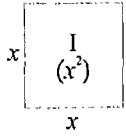
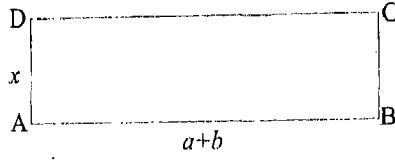
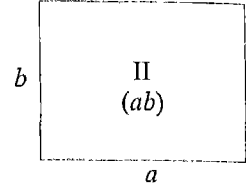
$$(x + a)(x + b) = x^2 + ax + bx + ab,$$

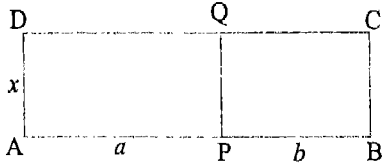
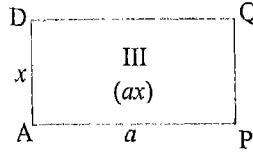
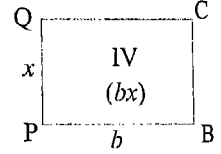
जहाँ $x = 2$ cm, $a = 3$ cm, $b = 4$ cm हैं।

अब सर्वसमिका I पहले की भाँति सत्यापित हुई।

	2 cm	3 cm
4cm	(bx) 4×2 cm^2	(ab) 3×4 cm^2
2cm	(x^2) 2×2 cm^2	(ax) 3×2 cm^2

आकृति : 6.5

क्रियाकलाप 4 : नीचे दिखाई गई आकृति 6.6 में दिए गए तीन टुकड़ों से आरंभ कीजिए। ध्यान दीजिए कि इन तीन टुकड़ों का कुल क्षेत्रफल है :

$$x^2 + (a + b)x + ab \qquad (1)$$

आकृति : 6.6

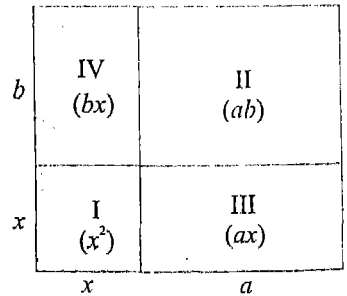
आकृति 6.6 (ii) का टुकड़ा लेकर इसमें AB पर एक बिंदु P इस प्रकार चिह्नित कीजिए कि AP = a हो। P से AD के समांतर एक रेखाखंड खींचिए जो DC से Q पर मिले [आकृति 6.7 (i)]। स्पष्टतः, PB = b है। PQ के अनुदिश काटकर इस टुकड़े से दो टुकड़े प्राप्त कीजिए [आकृति 6.7 (ii) और आकृति 6.7 (iii)]।

आकृति : 6.7

अब आकृतियों 6.6 (i), 6.6 (iii), 6.7 (ii) और 6.7 (iii) में दिखाए गए टुकड़ों को आकृति 6.8 के अनुसार जोड़िए। स्पष्ट है कि आकृति 6.8 में भुजाओं $x + a$ और $x + b$ वाला एक आयत दिखाया गया है। इस आयत का क्षेत्रफल है :

$$(x + a)(x + b) \qquad (2)$$

अब टुकड़े अलग-अलग हों या जोड़ दिए गए हों इनका कुल क्षेत्रफल वही रहेगा। अतः (2) और (1) का प्रयोग करने पर,

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

अब सर्वसमिका I पहले की भाँति सत्यापित हुई।

आकृति : 6.8

टिप्पणियाँ 1 : ऊपर दिए गए क्रियाकलापों 1 से 4 में x, a तथा b को धनात्मक माना गया है। परंतु याद रखिए कि सर्वसमिका I, x, a और b के सभी धनात्मक, ऋणात्मक तथा शून्य मानों के लिए सत्य होती है।

2. ध्यान दीजिए कि b का मान a अथवा $-a$ के बराबर भी हो सकता है। इन स्थितियों में सर्वसमिका I के निम्नलिखित विशिष्ट रूप प्राप्त होते हैं :

(i) जब $b = a$, तब

$$(x + a)(x + a) = x^2 + (a + a)x + a^2 \quad [\text{ सर्वसमिका I में } b = a \text{ रखने पर }]$$

$$= x^2 + 2ax + a^2$$

ध्यान दीजिए कि यह अनुच्छेद 6.1 में दी हुई सर्वसमिका A ही है।

(ii) जब $b = -a$, तब

$$(x + a)\{x + (-a)\} = x^2 + \{a + (-a)\}x + a \times (-a),$$

[सर्वसमिका I में $b = -a$ रखने पर]

$$= x^2 - a^2$$

ध्यान दीजिए कि यह अनुच्छेद 6.1 में दी हुई सर्वसमिका C ही है।

अब हम यह दिखाएँगे कि बीजीय व्यंजकों के सरलीकरण में और गुणनफलों के मान ज्ञात करने में सर्वसमिका I का प्रयोग कैसे किया जाता है।

उदाहरण 1 : सर्वसमिका I का प्रयोग कर निम्नलिखित गुणनफल ज्ञात कीजिए :

(i) $(y + 2)(y + 6)$ (ii) $(x + 5)(x - 3)$

हल : (i) $(y + 2)(y + 6)$ की तुलना $(x + a)(x + b)$ से करने पर, हम देखते हैं कि

$$x = y,\ a = 2,\ b = 6$$

अत: सर्वसमिका I का प्रयोग करने पर प्राप्त होता है :

$$(y + 2)(y + 6) = y^2 + (2 + 6)\,y + 2 \times 6$$

$$= y^2 + 8y + 12$$

(ii) $(x + 5)(x - 3)$ की तुलना $(x + a)(x + b)$ से करने पर, हम देखते हैं कि

$$a = 5,\ b = -3$$

अत: सर्वसमिका I का प्रयोग करने पर प्राप्त होता है :

$$(x+5)(x-3) = x^2 + \{5+(-3)\}x + 5\times(-3)$$
$$= x^2 + 2x - 15$$

उदाहरण 2 : निम्नलिखित गुणनफल ज्ञात कीजिए :

(i) $(z-1)(z-8)$ (ii) $(p-4)(p+7)$

हल : (i) आइए, $(z-1)(z-8)$ की तुलना $(x+a)(x+b)$ से करें। हम देखते हैं कि

$x = z, a = -1, b = -8$

अतः सर्वसमिका I का प्रयोग करने पर प्राप्त होता है :

$$(z-1)(z-8) = z^2 + \{(-1)+(-8)\}\,z + \{(-1)\times(-8)\}$$
$$= z^2 - 9z + 8$$

(ii) सर्वसमिका I का प्रयोग करने पर,

$$(p-4)(p+7) = p^2 + \{(-4)+7\}p + (-4)\times 7$$
$$= p^2 + 3p - 28$$

टिप्पणी : आप मन-ही-मन तुलना कर, ऊपर खंड (ii) में दिखाए गए अनुसार सीधे ही सर्वसमिका का प्रयोग कर सकते हैं।

उदाहरण 3 : दी गई संख्याओं को सीधे-सीधे गुणा किए बिना ही 104×106 का मान ज्ञात कीजिए।

हल : 104 को 100 + 4 तथा 106 को 100 + 6 लिखने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$104 \times 106 = (100+4)\times(100+6)$$
$$= 100^2 + (4+6)\,100 + 4\times 6 \quad \text{[सर्वसमिका I के प्रयोग से]}$$
$$= 10000 + 10\times 100 + 24$$
$$= 10000 + 1000 + 24 = 11024$$

उदाहरण 4 : किसी उपयुक्त सर्वसमिका का प्रयोग कर 83×79 का मान निकालिए।

हल : $83 \times 79 = (80+3)\times(80-1)$

$$= 80^2 + (3-1)\,80 + 3\times(-1) \quad \text{[सर्वसमिका I के प्रयोग से]}$$
$$= 6400 + 160 - 3 = 6557$$

प्रश्नावली 6.1

निम्नलिखित गुणनफल ज्ञात करने के लिए, किसी उपयुक्त सर्वसमिका का प्रयोग कीजिए :

1. $(x + 4)(x + 5)$ **2.** $(x + 6)(x + 9)$

3. $(x + 8)(x + 7)$ **4.** $(x + 4)(x + 9)$

5. $(x + 2)(x + 6)$ **6.** $(x + 4)(x - 1)$

7. $(p + 6)(p - 4)$ **8.** $(y + 8)(y - 3)$

9. $(x - 4)(x - 1)$ **10.** $(z - 14)(z - 1)$

11. $(y - 4)(y - 11)$ **12.** $(x - 4)(x + 21)$

13. $(x - 7)(x + 12)$ **14.** $(y - 4)(y + 20)$

निम्निलिखित गुणनफलों के मान ज्ञात कीजिए :

15. (i) $\left(x + \frac{1}{5}\right)(x + 5)$ (ii) $(y + 6)\left(y + \frac{5}{12}\right)$

16. (i) $\left(z + \frac{3}{4}\right)\left(z + \frac{4}{3}\right)$ (ii) $(x^2 + 4)(x^2 + 9)$

17. (i) $(y^2 + 12)(y^2 + 6)$ (ii) $(q^2 + 4)(q^2 - 1)$

18. (i) $(p^2 + 16)\left(p^2 - \frac{1}{4}\right)$ (ii) $\left(y^2 + \frac{5}{7}\right)\left(y^2 - \frac{14}{5}\right)$

19. (i) $(z^3 + 14)(z^3 + 1)$ (ii) $(z^3 + 1)(z^3 - 8)$

20. (i) $(y^3 + 2)\left(y^3 - \frac{3}{8}\right)$ (ii) $\left(x^3 - \frac{3}{8}\right)\left(x^3 + \frac{16}{17}\right)$

दी गई संख्याओं को बिना सीधे-सीधे गुणा किए, निम्नलिखित गुणनफल ज्ञात कीजिए :

21. (i) 103×106 (ii) 204×207

22. (i) 95×96 (ii) 86×82

23. (i) 98×103 (ii) 95×101

24. (i) 194×189 (ii) 205×192

25. (i) 198×209 (ii) 204×197

III. $(a+b+c)^2$ का प्रसारण

आप पहले पढ़ चुके हैं कि किसी द्विपद $(a+b)$ के वर्ग का प्रसारण कैसे किया जाता है। द्विपद के वर्ग के प्रसारण की इस विधि का विस्तार हम त्रिपद $(a+b+c)$ के वर्ग के प्रसारण के लिए आगे बताए अनुसार कर सकते हैं।

माना कि $b+c=x$ है। तब

$(a+b+c)^2 = (a+x)^2$

$= a^2 + 2ax + x^2$ [सर्वसमिका A के प्रयोग से]

$= a^2 + 2a(b+c) + (b+c)^2$ [क्योंकि $x = b + c$]

$= a^2 + 2ab + 2ac + (b^2 + 2bc + c^2)$ [सर्वसमिका A के प्रयोग से]

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ [पदों को पुनर्व्यवस्थित कर]

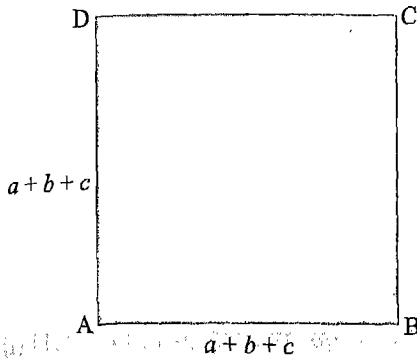
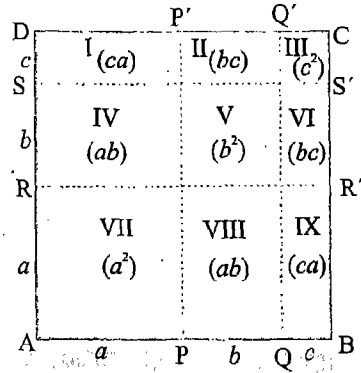
इस प्रकार हमें निम्नलिखित सर्वसमिका प्राप्त होती है :

सर्वसमिका II : $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

टिप्पणियाँ 1 : ध्यान दीजिए कि व्यंजक $a+b+c$ के वर्ग का प्रसार तीन वर्ग पदों तथा तीन गुणन पदों से बना होता है।

2. a, b और c के मान धनात्मक या ऋणात्मक कुछ भी हो सकते हैं।

क्रियाकलाप 5 : अब हम ज्यामितीय और प्रायोगिक विधि से ऊपर दी गई सर्वसमिका का सत्यापन करेंगे। a, b और c के कोई उपयुक्त मान लेकर गत्ते के एक टुकड़े (या किसी पुराने ग्रीटिंग कार्ड) पर भुजाओं $a+b+c$ वाला एक वर्ग ABCD बनाइए। स्पष्टतः, इस वर्ग का क्षेत्रफल $(a+b+c)^2$ है। AB पर दो बिंदु P और Q ऐसे चिह्नित कीजिए कि $AP = a$ और $PQ = b$ हो [आकृति 6.9 (ii)]। स्पष्टतः, इसका अर्थ हुआ कि $QB = c$ है।

AD पर दो बिंदु R और S इस प्रकार चिह्नित कीजिए कि $AR = a$ और $RS = b$ हो [आकृति 6.9 (ii)]। स्पष्टतः, इसका अर्थ यह हुआ कि $SD = c$ है। P और Q से AD के समांतर रेखाखंड PP' और QQ' खींचिए जो DC से क्रमशः P' और Q' पर मिले। R और S से AB के समांतर रेखाखंड RR' और SS' खींचिए जो BC से क्रमशः R' और S' पर मिले। ऐसा करने से वर्ग I, II, ..., IX से चिह्नित नौ ऐसे टुकड़ों में बँट जाएगा जिनके क्षेत्रफल क्रमशः

(i)

(ii)

आकृति : 6.9

$ca, bc, c^2, ab, b^2, bc, a^2, ab$ और ca हैं। इन टुकड़ों का कुल क्षेत्रफल है :

$$ca + bc + c^2 + ab + b^2 + bc + a^2 + ab + ca$$

अर्थात् $$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

क्योंकि पूरे वर्ग का क्षेत्रफल इसके टुकड़ों के क्षेत्रफल का कुल योग है, अत: आवश्यक होगा कि

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

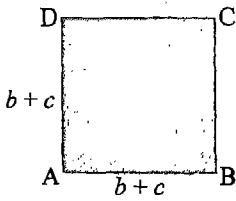
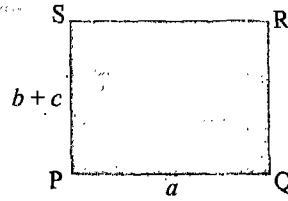
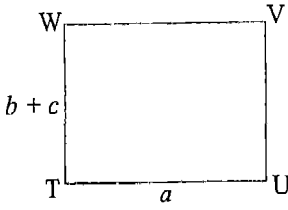
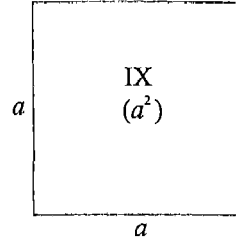
इस प्रकार, सर्वसमिका ज्यामितीय रूप से सत्यापित हुई।

अब हम इस सर्वसमिका को प्रायोगिक रूप से सत्यापित करेंगे। a, b और c के ऐसे भिन्न-भिन्न मान लीजिए जो 1 cm और 8 cm के बीच हों जिससे कि टुकड़ों पर कार्य करना सुविधाजनक रहे। परंतु यह प्रतिबंध ऐच्छिक है (ऐसा करना अनिवार्य नहीं)। एक गत्ते के टुकड़े (या किसी पुराने ग्रीटिंग कार्ड) में से निम्नलिखित टुकड़े काटिए :

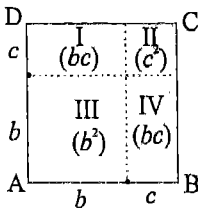
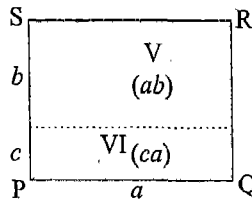
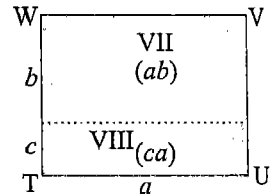
(i) भुजा $b+c$ वाला एक वर्ग, (ii) भुजाओं $b+c$ और a वाले दो आयत, और

(iii) भुजा a वाला एक वर्ग (आकृति 6.10)।

(i)

(ii)

आकृति : 6.10

आकृति : 6.10

आकृति 6.10 (i) को लीजिए। AB पर, A से दूरी b पर, एक बिंदु लीजिए [आकृति 6.11 (i)]। लिए गए बिंदु में से AD के समांतर एक रेखा खींचिए। अब AD पर भी, A से दूरी b पर एक बिंदु लीजिए। इस बिंदु से AB के समांतर एक रेखा खींचिए। ऐसा करने पर वर्ग ABCD चार भागों में बँट जाएगा जिन्हें आकृति 6.11 (i) में I, II, III और IV से दिखाया गया हैं। इन भागों के माप आकृति में दिखाए गए हैं। खींची गई रेखाओं पर काटते हुए इन भागों को अलग कर लीजिए।

अब आकृति 6.10 (ii) को लीजिए। SP पर, S से दूरी b पर, एक बिंदु लीजिए [आकृति 6.11 (ii)]। लिए गए बिंदु में से होकर SR के समांतर एक रेखा खींचिए। ऐसा करने पर आयत PQRS दो भागों में बँट जाएगा जिन्हें आकृति 6.11 (ii) में V और VI से दिखाया गया है। इन भागों के माप आकृति में दिखाए गए हैं। खींची गई रेखा पर काटकर दोनों भागों को अलग कर लीजिए।

आकृति : 6.11

आकृति 6.10 (iii) को लीजिए। WT पर, W से दूरी b पर, एक बिंदु लीजिए। लिए गए बिंदु में से WV के समांतर एक रेखा खींचिए। यह रेखा आयत TUVW को दो भागों में बाँट देगी जिन्हें आकृति 6.11 (iii) में VII और VIII से दिखाया गया है। इन भागों के माप आकृति में दिखाए गए हैं। दोनों भागों को अलग करने के लिए खींची गई रेखा पर काटिए।

आकृति 6.10 (iv) में भुजा a वाले वर्ग पर IX लिखिए। अब भागों I से IX को आकृति 6.12 में दिखाए गए अनुसार जोड़ लीजिए। स्पष्टत: ऐसा करने पर भुजा $(a + b + c)$ वाला एक वर्ग प्राप्त होता है। यह देखना सरल है कि इस वर्ग का क्षेत्रफल $(a + b + c)^2$ है।

आकृति : 6.12

क्योंकि पूरे वर्ग का क्षेत्रफल इसके टुकड़ों के कुल क्षेत्रफल के बराबर होना अनिवार्य है, अत:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

इस प्रकार, सर्वसमिका II प्रायोगिक रूप से सत्यापित हुई।

अब सर्वसमिका II का प्रयोग किसी त्रिपद के वर्ग को प्रसारित रूप में लिखने में दिखाया जाएगा।

उदाहरण 5 : $(7x + 4y + 3z)^2$ को प्रसारित रूप में लिखिए।

हल : दिए हुए व्यंजक की $(a + b + c)^2$ से तुलना करने पर, हम पाते हैं कि

$$a = 7x, b = 4y, c = 3z$$

अत: सर्वसमिका II का प्रयोग करने पर प्राप्त होता है :

$$(7x + 4y + 3z)^2 = (7x)^2 + (4y)^2 + (3z)^2 + 2(7x)(4y) + 2(4y)(3z) + 2(3z)(7x)$$
$$= 49x^2 + 16y^2 + 9z^2 + 56\,xy + 24\,yz + 42\,zx$$

उदाहरण 6 : $(2p - 5q + 7r)^2$ को प्रसारित रूप में लिखिए।

हल : दिए हुए व्यंजक $(2p - 5q + 7r)^2$ को हम $[2p + (-5q) + 7r]^2$ लिख सकते हैं। दिए हुए व्यंजक की तुलना $(a + b + c)^2$ से करने पर, हम पाते हैं कि

$$a = 2p, b = -5q, c = 7r$$

अत: सर्वसमिका II का प्रयोग करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$(2p - 5q + 7r)^2 = (2p)^2 + (-5q)^2 + (7r)^2 + 2(2p)(-5q) + 2(-5q)(7r) + 2(7r)(2p)$$
$$= 4p^2 + 25q^2 + 49r^2 - 20pq - 70qr + 28\,rp$$

उदाहरण 7 : $(4a-3b-2c)^2$ को प्रसारित रूप में लिखिए।

हल : सर्वसमिका II का प्रयोग करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$(4a-3b-2c)^2 = [4a+(-3b)+(-2c)]^2$$
$$= (4a)^2+(-3b)^2+(-2c)^2+2(4a)(-3b)+2(-3b)(-2c)+2(-2c)(4a)$$
$$= 16a^2+9b^2+4c^2-24ab+12bc-16ac$$

टिप्पणी : याद कीजिए कि $A^2=(-A)^2$ होता है। इस प्रकार हम व्यंजक $(4a-3b-2c)^2$ का मान $(-4a+3b+2c)^2$ के रूप में भी ज्ञात कर सकते थे।

उदाहरण 8 : व्यंजक $\left(-5x+\frac{1}{2}y+\frac{3}{4}z\right)^2$ को प्रसारित रूप में लिखिए।

हल : सर्वसमिका II का प्रयोग करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$(-5x+\frac{1}{2}y+\frac{3}{4}z)^2$$
$$=(-5x)^2+\left(\frac{1}{2}y\right)^2+\left(\frac{3}{4}z\right)^2+2(-5x)\left(\frac{1}{2}y\right)+2\left(\frac{1}{2}y\right)\left(\frac{3}{4}z\right)+2\left(\frac{3}{4}z\right)(-5x)$$
$$=25x^2+\frac{1}{4}y^2+\frac{9}{16}z^2-5xy+\frac{3}{4}yz-\frac{15}{2}xz$$

उदाहरण 9 : $(x+2y-3z)^2+(x-2y+3z)^2$ को सरल कीजिए।

हल : सर्वसमिका II का प्रयोग करने पर,

$$(x+2y-3z)^2 = x^2+4y^2+9z^2+4xy-12yz-6xz \quad (1)$$
$$(x-2y+3z)^2 = x^2+4y^2+9z^2-4xy-12yz+6xz \quad (2)$$

(1) और (2) के संगत पक्षों का योग करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$(x+2y-3z)^2+(x-2y+3z)^2 = 2x^2+8y^2+18z^2-24yz$$

प्रश्नावली 6.2

निम्नलिखित प्रत्येक (वर्ग) को प्रसारित रूप में लिखिए :

1. $(x+2y+4z)^2$

2. $(-3x+y+5z)^2$

3. $(-x-2y+6z)^2$

4. $(3a+2b-3c)^2$

5. $(3a-7b-c)^2$

6. $(5a-7b+c)^2$

7. $(4l + 2m - 3n)^2$
8. $(-2l + m - 8n)^2$
9. $(l + 2m - 7n)^2$
10. $(p + 9q + 2)^2$
11. $\left(6x + \frac{1}{2}y + 4z\right)^2$
12. $\left(9x - y + \frac{1}{3}z\right)^2$
13. $\left(\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + 16\right)^2$
14. $\left(-a - \frac{1}{2}b - 6\right)^2$

रिक्त स्थानों की पूर्ति इस प्रकार कीजिए कि निम्नलिखित प्रत्येक कथन सत्य हो जाए :

15. $(3x - 4y + 2z)^2 = ...x^2 + ...y^2 + ...z^2 - ...xy - ...yz + ...zx$
16. $(-2x - 3y + 5z)^2 = ...x^2 + ...y^2 + ...z^2 + ...xy - ...yz - ...zx$
17. $(a - b + c)^2 = a^2 ... b^2 ... c^2 ... 2ab ... 2bc ... 2ca$
18. $(a - 2b + 7c)^2 = a^2 ... b^2 ... c^2 ... 4ab ... 28bc ... 14ca$

सरल कीजिए :

19. $(p + q + r)^2 + (p - q - r)^2$
20. $(p - q + r)^2 + (p - q - r)^2$
21. $(p + q + r)^2 - (p - q - r)^2$
22. $(p - q + r)^2 - (p - q - r)^2$
23. $(2x + y + z)^2 - (2x - y - z)^2$
24. $(2x - y + z)^2 - (2x + y - z)^2$

III. $(a + b)^3$ का प्रसारण

आप पहले ही सीख चुके हैं कि द्विपद $(a + b)$ के वर्ग का प्रसारण कैसे किया जाता है। द्विपद के वर्ग के प्रसारण की इस विधि का विस्तार हम द्विपद $(a + b)$ के घन के प्रसारण के लिए नीचे दिखाए अनुसार कर सकते हैं:

सर्वसमिका A द्वारा,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

दोनों पक्षों को $(a + b)$ से गुणा करने पर, हमें प्राप्त होता है:

$$(a + b)(a + b)^2 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2)$$

या

$$(a + b)^3 = a(a^2 + 2ab + b^2) + b(a^2 + 2ab + b^2)$$

$$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$ (समान पदों को मिलाकर a के घातांकों के घटते क्रम में रखने पर)

इस प्रकार, हमें निम्नलिखित सर्वसमिका प्राप्त होती है :

सर्वसमिका III : $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

सर्वसमिका III के RHS के पदों को हम ऐसे रूप में पुनर्व्यवस्थित कर सकते हैं कि इन्हें याद रखना अपेक्षाकृत सरल हो।

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$= a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$ (पदों को पुनर्व्यवस्थित कर)

$= a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$ (अंतिम दो पदों में से $3ab$ सार्व लेकर)

इस प्रकार, हमें सर्वसमिका III का निम्न वैकल्पिक रूप प्राप्त होता है:

सर्वसमिका III' : $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$

सर्वसमिका $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ **का ज्यामितीय सत्यापन**

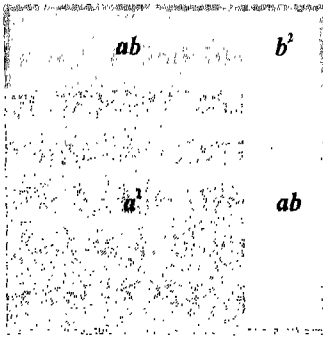
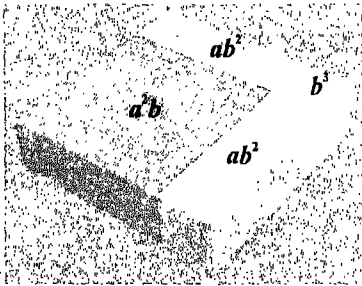
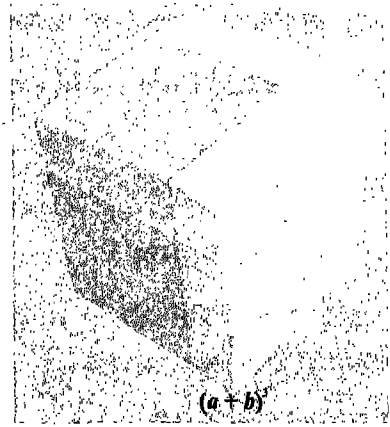
पिछली कक्षा में आपने कागज के घन और लंबकोणिक समांतर षट्फलक या घनाभ (cuboid) बनाना सीखा था। ऊपर बताई गई सर्वसमिका के सत्यापन के लिए आपको बनाने होंगे :

- भुजा a का एक घन (जिसे $a \times a \times a$ घन कहा जाएगा)
- भुजा b वाला एक घन (जिसे $b \times b \times b$ घन कहा जाएगा)
- भुजाओं a, a, b वाले तीन घनाभ (जिन्हें $a \times a \times b$ घनाभ कहा जाएगा)
- भुजाओं a, b, b वाले तीन घनाभ (जिन्हें $a \times b \times b$ घनाभ कहा जाएगा)

इन आठ टुकड़ों (गुटकों) में से पहले ये चार टुकड़े लीजिए :

- $a \times a \times a$ घन
- तीन में से दो $a \times a \times b$ घनाभ
- एक $a \times b \times b$ घनाभ

इन चार टुकड़ों को इस प्रकार खड़ा कीजिए कि इनके आधार आकृति 6.13 (i) के अनुसार हों। तब प्रत्येक टुकड़े की ऊँचाई a होगी [आकृति 6.13 (ii)]। स्पष्टतया, चारों गुटकों के आधारों से भुजा $a+b$ वाला एक वर्ग बन जाएगा। जो ठोस हम बनाने जा रहे हैं, ये चारों गुटके उसका निचला स्तर या भाग बनाते हैं। ध्यान दीजिए कि यह भाग भुजाओं $a+b, a+b, a$ वाला एक घनाभ बन गया।

अब शेष चार गुटके लेकर उन्हें भी इस प्रकार खड़ा कीजिए कि उनके आधार भी आकृति 6.13 (i) के अनुसार ही हों। तब प्रत्येक गुटके की ऊँचाई b होगी [आकृति 6.13 (iii)]। इन टुकड़ों को निचले भाग [आकृति 6.13 (ii)] के ऊपर इस प्रकार चढ़ाकर रखिए कि बीच में खाली स्थान न रहने पाए। यह ऊपर वाला भाग हुआ। ध्यान दीजिए कि यह भाग भुजाओं $a+b, a+b$ और b वाला एक घनाभ है। इसका आधार निचले भाग की ऊपरी सतह को ठीक पूरा-पूरा ढक लेगा। क्योंकि निचले भाग की ऊँचाई a और ऊपरी भाग की ऊँचाई b है, अत: इस प्रकार बने ठोस की ऊँचाई $a+b$ है [आकृति 6.13 (iv)। इस प्रकार हम जो आठ गुटके लेकर चले थे उनसे भुजा $a+b$ वाला एक घन बन गया।

आकृति : 6.13

क्योंकि गुटकों के बीच कोई खाली स्थान नहीं है और स्पष्टतः अतिव्याप्ति (overlap) अर्थात् आंशिक आच्छादन तो है ही नहीं, बने हुए ठोस का आयतन गुटकों के कुल आयतन के बराबर है। अतः प्राप्त हुआ :

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

इस प्रकार सर्वसमिका का ज्यामितीय सत्यापन हुआ।

भुजा $a+b$ वाले घन से आरंभ कर हम ऊपर से उलटी (reverse) क्रिया भी कर सकते हैं। कद्दू या आलू जैसे किसी शाक का एक ठोस टुकड़ा लीजिए जो कुछ नरम तो हो पर लचीला नहीं (जिससे यह कट सके ओर कटने पर अपना आकार बनाए रखे)। सभी ओर से काट-काटकर इसे घन का आकार दीजिए। दियासलाई की तीली का एक छोटा टुकड़ा लीजिए जिसकी लंबाई, माना कि b हो। शाक के टुकड़े की ऊपरी सतह के एक कोने से दोनों ओर यह दूरी माप लीजिए। कोने से इस नापी गई दूरी पर ऊर्ध्वाधर तलों द्वारा शाक के इस टुकड़े को काटकर ऊँचाई $a+b$ वाले चार घनाभ प्राप्त कीजिए। इनके ऊपरी फलकों के माप $b \times b$, $a \times b$, $b \times a$ और $a \times a$ हैं। इन चारों को ऊपरी फलक से b दूरी नीचे एक-एक क्षैतिज तल से काटिए। ऐसा करने पर चारों में से प्रत्येक घनाभ के दो-दो टुकड़े हो जाएँगे और इस प्रकार कुल मिलाकर आठ टुकड़े प्राप्त होंगे। इन टुकड़ों के माप $b \times b \times b$, $b \times a \times b$, $b \times b \times a$, $b \times a \times a$, $a \times b \times b$, $a \times a \times b$, $a \times b \times a$ और $a \times a \times a$ हैं।

इन टुकड़ों के आयतन $b^3, ab^2, ab^2, a^2b, ab^2, a^2b, a^2b,$ और a^3 हैं। क्योंकि इन टुकड़ों का कुल आयतन उस टुकड़े के आयतन के बराबर है जिसे हम लेकर चले थे, अतः

$$b^3 + ab^2 + ab^2 + a^2b + ab^2 + a^2b + a^2b + a^3 = (a+b)^3$$

या

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

इस प्रकार, जिस सर्वसमिका की हम बात कर रहे थे, वह सत्यापित हुई।

IV. $(a-b)^3$ का प्रसारण

जिस प्रकार हमने सर्वसमिका A का प्रयोग कर $(a+b)^3$ का प्रसार किया था, उसी प्रकार सर्वसमिका B का प्रयोग कर हम $(a-b)^3$ का प्रसार कर सकते हैं।

सर्वसमिका B से प्राप्त होता है :

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

दोनों पक्षों को $(a-b)$ से गुणा करने पर मिलता है:

$$(a-b)(a-b)^2 = (a-b)(a^2-2ab+b^2)$$

या $$(a-b)^3 = a(a^2-2ab+b^2) - b(a^2-2ab+b^2)$$
$$= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3$$
$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$ (समान पदों को मिलाकर a के घातांकों के घटते क्रम में रखने पर)

इस प्रकार, हमें निम्नलिखित सर्वसमिका प्राप्त होती है :

सर्वसमिका IV : $$\boxed{(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$$

सर्वसमिका IV के RHS के पदों को हम ऐसे रूप में पुनर्व्यवस्थित कर सकते हैं जिसे याद रखना अपेक्षाकृत सरल हो।

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$= a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2$$ (पदों को पुनर्व्यवस्थित कर)
$$= a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$$ (अंतिम दो पदों में से $-3ab$ सार्व लेकर)

यहाँ से सर्वसमिका IV का निम्नलिखित वैकल्पिक रूप प्राप्त होता है :

सर्वसमिका IV′ : $$\boxed{(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)}$$

टिप्पणी: सर्वसमिका IV को सर्वसमिका III में b के स्थान पर $-b$ रखकर प्राप्त किया जा सकता है। इसी प्रकार, सर्वसमिका IV′ को सर्वसमिका III′ से प्राप्त किया जा सकता है।

अब इन सर्वसमिकाओं का प्रयोग दिखाने के लिए कुछ उदाहरण लिए जाएँगे।

उदाहरण 10 : निम्नलिखित घनों को प्रसारित रूप में लिखिए :

(i) $(7x+4y)^3$ (ii) $(2p-9q)^3$

हल : (i) दिए हुए व्यंजक की तुलना $(a+b)^3$ से करने पर, हम पाते हैं कि

$a = 7x,\ b = 4y$

अतः सर्वसमिका III′ का प्रयोग करने पर, हमें प्राप्त होता है:

$$(7x+4y)^3 = (7x)^3 + (4y)^3 + 3(7x)(4y)(7x+4y)$$
$$= 343x^3 + 64y^3 + 84xy(7x+4y)$$

$$= 343x^3 + 64y^3 + 588x^2y + 336xy^2$$
$$= 343x^3 + 588x^2y + 336xy^2 + 64y^3$$

(x के घातांकों के घटते क्रम में रखने पर)

(ii) दिए हुए व्यंजक की तुलना $(a-b)^3$ से करने पर, हम पाते हैं कि

$$a = 2p,\ b = 9q$$

अत: सर्वसमिका IV′ का प्रयोग करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$(2p-9q)^3 = (2p)^3 - (9q)^3 - 3(2p)(9q)(2p-9q)$$
$$= 8p^3 - 729q^3 - 54pq\,(2p-9q)$$
$$= 8p^3 - 729q^3 - 108p^2q + 486pq^2$$
$$= 8p^3 - 108p^2q + 486pq^2 - 729q^3$$

(p के घातांकों के घटते क्रम में रखने पर)

उदाहरण 11 : (i) $(-3x+5y)^3$ और (ii) $(-2z-y)^3$ का प्रसार कीजिए।

हल : (i) सर्वसमिका III′ का प्रयोग करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$(-3x+5y)^3 = (-3x)^3 + (5y)^3 + 3(-3x)(5y)(-3x+5y)$$
$$= -27x^3 + 125y^3 - 45xy\,(-3x+5y)$$
$$= -27x^3 + 125y^3 + 135x^2y - 225xy^2$$
$$= -27x^3 + 135x^2y - 225xy^2 + 125y^3$$

(x के घातांकों के घटते क्रम में रखने पर)

(ii) सर्वसमिका III′ का प्रयोग करने पर,

$$(-2z-y)^3 = \{(-2z) + (-y)\}^3$$
$$= (-2z)^3 + (-y)^3 + 3(-2z)(-y)(-2z-y)$$
$$= -8z^3 - y^3 + 6yz\,(-2z-y)$$
$$= -8z^3 - y^3 - 12yz^2 - 6y^2z$$
$$= -y^3 - 6y^2z - 12yz^2 - 8z^3$$
$$= -(y^3 + 6y^2z + 12yz^2 + 8z^3)$$ (y के घातांकों के घटते क्रम में रखने पर)

टिप्पणी : ध्यान दीजिए कि $(-A)^3 = -A^3$। अतः हम $(-2z - y)^3$ का मान $-(2z + y)^3$ के रूप में भी ज्ञात कर सकते थे।

उदाहरण 12 : $(x + 4y)^3 - (x - 4y)^3$ को सरल कीजिए।

हल : सर्वसमिका III′ का प्रयोग करने पर,

$$
\begin{aligned}
(x + 4y)^3 &= (x)^3 + (4y)^3 + 3(x)(4y)(x + 4y) \\
&= x^3 + 64y^3 + 12xy(x + 4y) \\
&= x^3 + 64y^3 + 12x^2y + 48xy^2 \\
&= x^3 + 12x^2y + 48xy^2 + 64y^3 \quad (x \text{ के घातांकों के घटते क्रम में रखने पर})
\end{aligned}
$$

सर्वसमिका IV′ का प्रयोग करने पर,

$$
\begin{aligned}
(x - 4y)^3 &= (x)^3 - (4y)^3 - 3(x)(4y)(x - 4y) \\
&= x^3 - 64y^3 - 12xy(x - 4y) \\
&= x^3 - 64y^3 - 12x^2y + 48xy^2 \\
&= x^3 - 12x^2y + 48xy^2 - 64y^3 \quad (x \text{ के घातांकों के घटते क्रम में रखने पर})
\end{aligned}
$$

ऊपर ज्ञात किए गए $(x + 4y)^3$ और $(x - 4y)^3$ के मानों का प्रयोग करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$
\begin{aligned}
(x + 4y)^3 - (x - 4y)^3 &= (x^3 + 12x^2y + 48xy^2 + 64y^3) - (x^3 - 12x^2y + 48xy^2 - 64y^3) \\
&= 24x^2y + 128y^3
\end{aligned}
$$

उदाहरण 13 : $x^3 + 8y^3$ का मान ज्ञात कीजिए, यदि $x + 2y = 8$ और $xy = 6$ है।

हल : दिया गया है : $x + 2y = 8$ और $xy = 6$

अब $(x + 2y)^3 = x^3 + (2y)^3 + 3(x)(2y)(x + 2y)$ (सर्वसमिका III′ से)

$= x^3 + 8y^3 + 6xy\,(x + 2y)$

$\therefore \quad x^3 + 8y^3 = (x + 2y)^3 - 6xy\,(x + 2y)$

$= (8)^3 - 6\,(6)(8)$ ($x + 2y = 8$ और $xy = 6$ रखने पर)

$= 512 - 288$

$= 224$

उदाहरण 14 : किसी उपयुक्त सर्वसमिका का प्रयोग कर 1001^3 का मान ज्ञात कीजिए।

हल : सर्वसमिका III′ का प्रयोग करने पर, हमें प्राप्त होता है:

$$\begin{aligned} 1001^3 &= (1000 + 1)^3 \\ &= 1000^3 + 1^3 + 3(1000)(1)(1000 + 1) \\ &= 1000000000 + 1 + 3000(1000 + 1) \\ &= 1000000000 + 1 + 3000000 + 3000 \\ &= 1003003001 \end{aligned}$$

उदाहरण 15 : किसी उपयुक्त सर्वसमिका का प्रयोग कर 998^3 का मान ज्ञात कीजिए।

हल : सर्वसमिका IV′ का प्रयोग करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$\begin{aligned} 998^3 &= (1000 - 2)^3 \\ &= (1000)^3 - (2)^3 - 3(1000)(2)(1000 - 2) \\ &= (1000)^3 - (2)^3 - 6(1000)(998) \\ &= 1000000000 - 8 - 5988000 \\ &= (1000000000 - 5988000) - 8 \\ &= 994012000 - 8 \\ &= 994011992 \end{aligned}$$

प्रश्नावली 6.3

निम्नलिखित में से प्रत्येक का प्रसार कीजिए :

1. $(x + 2y)^3$ **2.** $(2x - 3y)^3$ **3.** $(ax + by)^3$

4. $(x^2 + 2y)^3$ **5.** $(2x - y^2)^3$ **6.** $(-x + 4y)^3$

7. $(a + 5y)^3$ **8.** $\left(\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}y\right)^3$ **9.** $\left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y\right)^3$

10. $8x^3 + 27y^3$ का मान ज्ञात कीजिए, यदि

(i) $2x + 3y = 8$ और $xy = 2$ (ii) $2x + 3y = 18$ और $xy = 12$

(iii) $2x + 3y = 19$ और $xy = 3$ (iv) $2x + 3y = \frac{21}{2}$ और $xy = \frac{5}{6}$

11. $p^3 - 8y^3$ का मान ज्ञात कीजिए, यदि

(i) $p - 2y = 2$ और $py = 8$ (ii) $p - 2y = 1$ और $py = 10$

(iii) $p - 2y = 13$ और $py = -21$ (iv) $p - 2y = -11$ और $py = -5$

12. $125p^3 - 8q^3$ का मान ज्ञात कीजिए, यदि

(i) $5p - 2q = 1$ और $pq = 2$ (ii) $5p - 2q = 6$ और $pq = 4$

(iii) $5p - 2q = 7$ और $pq = 12$ (iv) $5p - 2q = 13$ और $pq = 30$

सरल कीजिए :

13. $(a + 2b)^3 + (a - 2b)^3$ **14.** $(a - 3b)^3 + (a + 3b)^3$

15. $(2a + 5b)^3 - (2a - 5b)^3$ **16.** $(7 - 2b)^3 - (7 + 2b)^3$

17. $\left(\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}b\right)^3+\left(\frac{1}{3}a-\frac{2}{3}b\right)^3$ **18.** $\left(\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}b\right)^3-\left(\frac{1}{3}a-\frac{2}{3}b\right)^3$

किसी उपयुक्त सर्वसमिका का प्रयोग कर निम्नलिखित घनों के मान निकालिए :

19. (i) $(104)^3$ (ii) $(1004)^3$ (iii) $(503)^3$

20. (i) $(99)^3$ (ii) $(996)^3$ (iii) $(999)^3$

21. (i) $(599)^3$ (ii) $(9.8)^3$ (iii) $(8.01)^3$

6.3 बीजीय व्यंजकों का गुणनखंडन

याद कीजिए कि किसी दिए गए बीजय व्यंजक को बहुधा दो या दो से अधिक बीजीय व्यंजकों (और संख्याओं) के गुणनफल के रूप में लिखना संभव होता है। जब कोई बीजीय व्यंजक कुछ संख्याओं और बीजीय व्यंजकों के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जाता है, तो इन संख्याओं और बीजीय व्यंजकों में से प्रत्येक दिए गए व्यंजक का *गुणनखंड* कहलाता है। किसी दिए गए व्यंजक को संख्याओं और बीजीय व्यंजकों के गुणनफल के रूप में लिखने की प्रक्रिया को *गुणनखंडन* कहते हैं। उदाहरणत:, क्योंकि $10\,pq = 5 \times 2 \times p \times q$ है, अत: 5, 2, p और q सभी $10\,pq$ के गुणनखंड हैं।

कक्षा VII में आपने गुणनखंडन की तीन मूलभूत विधियाँ सीखीं थीं :

- कोई सार्व गुणनखंड अलग कर गुणनखंडन करना

- पदों के पुनर्समूहन द्वारा गुणनखंडन करना
- सर्वसमिकाओं के प्रयोग द्वारा गुणनखंडन करना

आप पहले से ही जानते हैं कि सर्वसमिकाओं A, B और C (जिनका उल्लेख इस अध्याय के आरंभ में किया गया) का प्रयोग बीजीय व्यंजकों के गुणनखंडन में कैसे किया जाता है। अब हम इस अध्याय में सीखी गई सर्वसमिकाओं I से IV का प्रयोग कर बीजीय व्यंजकों का गुणनखंडन करेंगे।

उदाहरण 16 : $x^2 + 5x + 6$ का गुणनखंडन कीजिए।

हल: सर्वसमिका I से हम जानते हैं कि

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

इसका अर्थ यह हुआ कि यदि हम ऐसी दो संख्याएँ a और b (धनात्मक या ऋणात्मक) खोज सकें जिनका योगफल $a + b$, x का गुणांक हो और जिनका गुणनफल ab दिए गए व्यंजक का अचर पद हो, तो दिए हुए व्यंजक को $(x + a)(x + b)$ के रूप में गुणनखंडित किया जा सकता है। अत: आइए, ऐसी दो संख्याएँ a और b खोजने का प्रयास करें कि

$a + b = 5$ (x का गुणांक)

और $ab = 6$ (अचर पद)

अब 6 के गुणनखंड $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ और ± 6 हैं। प्रयत्न और भूल (trial and error) विधि द्वारा हम देखते हैं कि a और b को 2 और 3 लिया जा सकता है। 2 और 3 का योगफल 5 और इनका गुणनफल 6 है। अत :

$$x^2 + 5x + 6 = x^2 + (3 + 2)\,x + 3 \times 2 = (x + 3)\,(x + 2)$$ (सर्वसमिका I के प्रयोग से)

टिप्पणी : a और b का मान ज्ञात करने के लिए, प्रयत्न और भूल विधि में लगने वाले प्रयत्न को कुछ कम करने के लिए आप एक सरल तर्क का प्रयोग कर सकते थे। आइए, योगफल $a + b$ को S से और गुणनफल ab को P से व्यक्त करें। ध्यान दीजिए कि ऊपर लिए गए उदाहरण में S (5) धनात्मक है और P (6) भी धनात्मक है। इस तथ्य को हम इस प्रकार व्यक्त करते हैं : S : +, P : +

क्योंकि P धनात्मक है, अत: a और b या तो दोनों धनात्मक हैं या a और b दोनों ऋणात्मक। चूँकि S धनात्मक है, अत: a और b दोनों धनात्मक हैं। अत: हमें ऋणात्मक

गुणनखंडों पर ध्यान देने की आवश्यकता नहीं है। अब यह देखना सरल हो जाता है कि a और b के मान किसी क्रम में 2 और 3 हैं।

उदाहरण 17 : $x^2 + 3x - 10$ का गुणनखंडन कीजिए।

हल : यहाँ हमें दो संख्याएँ a और b ऐसी ज्ञात करनी हैं कि

$a + b = 3$ (x का गुणांक)

और $ab = -10$ (अचर पद) हो।

अब –10 के गुणनखंड $\pm 1, \pm 2, \pm 5$ और ± 10 हैं। थोड़े अनुमान और जाँच-परख से ज्ञात हो जाता है कि a और b को 5 तथा -2 लिया जा सकता है। 5 और -2 का योगफल 3, तथा इनका गुणनफल -10 है। अतः

$$x^2 + 3x - 10 = x^2 + \{5 + (-2)\}x + 5(-2)$$

$$= (x + 5)(x - 2) \quad \text{(सर्वसमिका I के प्रयोग से)}$$

टिप्पणी : यहाँ S : +, P : – है। चूँकि P ऋणात्मक है, अतः a और b में से एक संख्या धनात्मक और दूसरी ऋणात्मक है। यह ध्यान में रखते हुए, और यह भी कि S धनात्मक है, हम पाते हैं कि a और b में से बड़ी संख्या धनात्मक है। अब a और b के मानों को 5 और -2 निर्धारित करना सरल कार्य है।

उदाहरण 18 : $x^2 - 7x + 12$ का गुणनखंडन कीजिए।

हल : यहाँ S: –, P: + है। इसका अर्थ यह हुआ कि a और b दोनों ऋणात्मक हैं। क्योंकि

$a + b = -7$ और $ab = 12$,

और 12 के ऋणात्मक गुणनखंड $-1, -2, -3, -4, -6$ और -12 हैं, हम पाते हैं कि $a = -4$ तथा $b = -3$ (या फिर $a = -3$ तथा $b = -4$) अतः,

$$x^2 - 7x + 12 = x^2 + \{(-4) + (-3)\}x + (-4) \times (-3)$$

$$= (x - 4)(x - 3) \quad \text{(सर्वसमिका I के प्रयोग से)}$$

उदाहरण 19 : $x^2 - 3x - 10$ का गुणनखंडन कीजिए।

हल : यहाँ S : –, P : – है। अतः a और b में से एक धनात्मक और दूसरी संख्या ऋणात्मक है। S के ऋणात्मक होने के कारण संख्यात्मक रूप से बड़ा पद ऋणात्मक होगा। 10 के

गुणनखंड $\pm 1, \pm 2, \pm 5$ तथा ± 10 हैं। अतः a और b के मान -5 और 2 लेने से हमारा कार्य पूरा हो जाएगा। इस प्रकार,

$$x^2 - 3x - 10 = x^2 + \{2 + (-5)\}x + 2(-5)$$

$$= (x + 2)(x - 5) \qquad \text{(सर्वसमिका I के प्रयोग से)}$$

टिप्पणी : यदि किसी कारणवश भ्रम होने लगे, तो यह आवश्यक नहीं कि अंत में जो गुणनखंड बनते हैं उन्हें आप सर्वसमिका I के प्रयोग से ही लिखें। एक बार x के गुणांक और अचर पद को दो भागों में विभाजित करने के बाद, आप पुनर्समूहन कर सकते हैं। इससे आप एक सार्व गुणनखंड प्राप्त कर सकते हैं। इस प्रकार, ऊपर दिए गए उदाहरण में,

$$x^2 - 3x - 10 = x^2 + \{2 + (-5)\}x + 2(-5)$$

$$= x^2 + 2x + (-5)x + 2(-5)$$

$$= (x^2 + 2x) + \{(-5)x + 2(-5)\} \qquad \text{(पदों के पुनर्समूहन से)}$$

$$= x(x + 2) + (-5)(x + 2) \qquad \text{(पहले दो पदों में से सार्व } x \text{ और अंतिम}$$

$$= (x + 2)(x - 5) \qquad \text{दो पदों में से सार्व } -5 \text{ बाहर लेने पर)}$$

यदि आपने गुणनखंडन सर्वसमिका I के प्रयोग से किया है, तो आप इस विधि से उत्तर की जाँच कर सकते हैं।

उदाहरण 20 : व्यंजक $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz$ का गुणनखंडन कीजिए।

हल : हम देखते हैं कि पहले तीन पद क्रमशः $2x, y$ और z के वर्ग हैं। यह सर्वसमिका II, अर्थात्

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

की ओर इंगित करता है। आगे, दिए हुए व्यंजक में xy तथा yz वाले पद ऋणात्मक हैं। ऐसा दो प्रकार से हो सकता है :

1. इन दोनों पदों में सार्व अक्षर संख्या y का गुणांक ऋणात्मक हो और x तथा z के गुणांक धनात्मक हों। इस दशा में x, y, z के गुणांकों के चिह्नों का क्रम $+, -, +$ होगा।
2. y का गुणांक तो धनात्मक हो परंतु x और z के गुणांक ऋणात्मक हों। इस दशा में x, y, z के गुणांकों के चिह्नों का क्रम $-, +, -$ होगा।

क्योंकि किसी व्यंजक (A) और इसके संगत ऋणात्मक व्यंजक (–A) का वर्ग समान होता है, अतः इससे कोई अंतर नहीं पड़ता कि ऊपर बताई गई दशाओं में से कौन सी दशा

ली जाती है। पहली दशा लेने पर, दिए गए व्यंजक को इस प्रकार लिखा जा सकता है :

$4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz = (2x)^2 + (-y^2) + z^2 + 2(2x)(-y) + 2(-y)z + 2(2x)z$

दिए गए व्यंजक के इस रूप की तुलना सर्वसमिका II के RHS से करने पर, हम पाते हैं कि

$$a = 2x,\ b = -y,\ c = z$$

अतः $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz$

$= (2x)^2 + (-y^2) + z^2 + 2(2x)(-y) + 2(-y)z + 2(2x)z$

$= \{2x + (-y) + z\}^2$ (सर्वसमिका II के प्रयोग से)

$= (2x - y + z)^2$

$= (2x - y + z)(2x - y + z)$

उदाहरण 21 : व्यंजक $8x^3 + 27y^3 + 36x^2y + 54xy^2$ का गुणनखंडन कीजिए।

हल : ध्यान दीजिए कि पहले दो पद क्रमशः $2x$ और $3y$ घन हैं। साथ ही शेष दो पदों का गुणनखंड 3 है। इससे बोध होता है कि सर्वसमिका III′ अर्थात्

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

का प्रयोग किया जाए। दिए हुए व्यंजक को हम इस प्रकार लिख सकते हैं:

$$8x^3 + 27y^3 + 36x^2y + 54xy^2 = (2x)^3 + (3y)^3 + 3(2x)(3y)(2x + 3y)$$

दिए हुए व्यंजक के इस रूप की तुलना सर्वसमिका III′ के RHS से करने पर, हम पाते हैं :

$$a = 2x,\ b = 3y$$

अतः,

$8x^3 + 27y^3 + 36x^2y + 54xy^2 = (2x)^3 + (3y)^3 + 3(2x)(3y)(2x + 3y)$

$= (2x + 3y)^3$ (सर्वसमिका III′ के प्रयोग से)

$= (2x + 3y)(2x + 3y)(2x + 3y)$

उदाहरण 22 : व्यंजक $8x^3 - \frac{y^3}{27} - 2xy\left(2x - \frac{y}{3}\right)$ का गुणनखंडन कीजिए।

हल : हम देखते हैं कि $8x^3$ और $\frac{y^3}{27}$ क्रमशः $2x$ और $\frac{y}{3}$ के घन हैं। इससे सर्वसमिका IV′,

अर्थात्

$$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab\,(a-b)$$

के प्रयोग का बोध होता है। दिए गए व्यंजक को निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है :

$$8x^3 - \frac{y^3}{27} - 2xy\left(2x - \frac{y}{3}\right) = (2x)^3 - \left(\frac{y}{3}\right)^3 - 3(2x)\left(\frac{y}{3}\right)\left(2x - \frac{y}{3}\right)$$

दिए गए व्यंजक के इस रूप की तुलना सर्वसमिका IV′ के RHS से करने पर, हम पाते हैं :

$$a = 2x,\ b = \frac{y}{3}$$

अतः, $8x^3 - \dfrac{y^3}{27} - 2xy\left(2x - \dfrac{y}{3}\right) = (2x)^3 - \left(\dfrac{y}{3}\right)^3 - 3(2x)\left(\dfrac{y}{3}\right)\left(2x - \dfrac{y}{3}\right)$

$$= \left(2x - \frac{y}{3}\right)^3 \qquad \text{(सर्वसमिका IV′ के प्रयोग से)}$$

$$= \left(2x - \frac{y}{3}\right)\left(2x - \frac{y}{3}\right)\left(2x - \frac{y}{3}\right)$$

प्रश्नावली 6.4

निम्नलिखित प्रत्येक व्यंजक का गुणनखंडन कीजिए :

1. $x^2 + 10x + 9$

2. $x^2 + 7x + 12$

3. $y^2 - 2y - 8$

4. $y^2 - 6y - 7$

5. $p^2 + 3p - 4$

6. $p^2 + 4p - 12$

7. $m^2 - 8m + 15$

8. $m^2 - 10m + 24$

निम्नलिखित में से प्रत्येक व्यंजक का गुणनखंडन कीजिए :

9. $9x^2 + y^2 + 25z^2 + 6xy + 10yz + 30xz$

10. $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy - 24yz - 16xz$

11. $m^2 + 4n^2 + 25z^2 - 4mn - 20nz + 10mz$

12. $49m^2 + 4n^2 + 9z^2 - 28mn + 12nz - 42mz$

13. $9x^2 + y^2 + 25 + 6xy + 10y + 30x$

निम्नलिखित व्यंजकों के गुणनखंडन कीजिए :

14. $p^2 + \dfrac{q^2}{4} + 1 + pq + q + 2p$

15. $\frac{p^2}{4}+\frac{q^2}{9}+36+\frac{pq}{3}+4q+6p$

16. $2x^2 + y^2 + 8z^2 - 2\sqrt{2}xy - 4\sqrt{2}yz + 8xz$ [संकेत : $2 = (\sqrt{2})^2$]

17. $3x^2+3y^2+z^2+6xy+2\sqrt{3}yz+2\sqrt{3}xz$

निम्नलिखित प्रत्येक व्यंजक का गुणनखंडन कीजिए :

18. $8x^3 + y^3 + 12x^2y + 6xy^2$

19. $8x^3 - y^3 - 12x^2y + 6xy^2$

20. $27q^3 - 125p^3 - 135q^2p + 225qp^2$

21. $64p^3 - 27q^3 - 144p^2q + 108pq^2$

22. $27 - 125p^3 - 135p + 225p^2$

23. $64p^3 - 27 - 144p^2 + 108p$

24. $8x^3 + 729 + 108x^2 + 486x$

25. $27x^3 - \frac{1}{216} - \frac{9}{2}x^2 + \frac{1}{4}x$

याद रखने योग्य बातें

कुछ मानक सर्वसमिकाएँ

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
4. $(x + a)(x + b) = x^2 + ax + bx + ab$

   या

   $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
5. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$
6. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

   या

   $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$
7. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

   या

   $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$

अध्याय

7

बहुपद

7.1 भूमिका

पिछली कक्षाओं में, आपने बीजीय व्यंजकों का अध्ययन किया था। जैसा कि आप जानते हैं, कि किसी बीजीय व्यंजक में कई अक्षर संख्याएँ (literals) हो सकती हैं जिन्हें *चर* (*variable*) भी कहा जाता है। जिन बीजीय व्यंजकों का अध्ययन आपने किया था, उनमें आने वाली अक्षर संख्याओं के घातांक केवल *ऋणेतर* (*non-negative*) पूर्णांक थे। इस गुण वाले बीजीय व्यंजक *बहुपद* (*polynomial*) कहलाते हैं। कुछ बहुपद अन्य बहुपदों की तुलना में, इस अर्थ में सरलतर होते हैं कि इनमें केवल एक ही अक्षर संख्या, जैसे कि x होती है। ऐसे *बहुपद एक चर x वाले बहुपद* (*polynomials in one variable*) कहलाते हैं।

इस अध्याय में, हम एक चर वाले बहुपदों का अध्ययन करेंगे। हम किसी बहुपद को एकपदी अथवा द्विपद से भाग देना सीखेंगे। हम विभाजन की इस प्रक्रिया से संबद्ध भाज्य, भाजक, भागफल और शेष के मध्य दो उपयोगी और रोचक संबंध भी प्राप्त करेंगे।

7.2 एक चर वाले बहुपद

जैसा कि अनुच्छेद 7.1 में बताया गया है,

बहुपद ऐसे बीजीय व्यंजक को कहते हैं जिसके चरों के घातांक केवल ऋणेतर पूर्णांक हों।

उदाहरण के लिए, निम्नलिखित सभी व्यंजक बहुपद हैं :

$17 + 2x + x^2,\ 7x^3 + \sqrt{2}x^2y - 5xy^2 + 12y^3,\ x^4 + 3x - 9$

पहला बहुपद और अंतिम बहुपद एक चर x वाला है। मध्य का व्यंजक दो चरों x और y वाला बहुपद है। आगे से जब तक अन्यथा न कहा जाए, *बहुपद शब्द से हमारा तात्पर्य एक चर वाले बहुपद से होगा।*

क्या निम्नलिखित व्यंजकों में से कोई भी एक बहुपद है?

$$6 + 2x^{-2} + x^2,\ x^2 + 3\sqrt{x} - 9,\ 2x^2 - x^{\frac{1}{3}} + 4$$

पहले व्यंजक में चर x का घातांक ऋणात्मक है। दूसरे और तीसरे व्यंजकों में चरों के घातांक आवश्यक रूप से धनात्मक पूर्णांक नहीं हैं। अतः, इनमें से कोई भी व्यंजक बहुपद नहीं है।

केवल एक पद वाले बहुपद को *एकपदी* (*monomial*) कहते हैं। केवल दो पदों वाले बहुपद को *द्विपद* (*binomial*) तथा केवल तीन पदों वाले बहुपद को *त्रिपद* (*trinomial*) कहा जाता है। बहुपद में *बहु* शब्द का अर्थ *अनेक* है। इस प्रकार, बहुपद के शाब्दिक अर्थ से अनेक पदों वाले व्यंजक का बोध होता है। परंतु इसे एकपदियों, द्विपदों और त्रिपदों के लिए भी प्रयोग किया जाता है।

जिस बहुपद में केवल एक चर, माना कि x हो, उसे चर x में (या चर x वाला) बहुपद कहते हैं।

इस प्रकार, $5x^2 + 13x - 9$ चर x में एक बहुपद है।

$y^3 + 7y - 19$ चर y में एक बहुपद है।

बहुपद के पदों को चर के घातांकों के अवरोही अर्थात् घटते क्रम में लिखा जाता है। इसे *बहुपद का मानक रूप* (*standard form of a polynomial*) कहते हैं। जिस पद में x नहीं होता उसे अंत में लिखा जाता है। इसे *अचर* (*constant*) पद कहा जाता है, क्योंकि चर को कोई भी मान क्यों न दे दिया जाए, इसका मान वही रहता है। चर x वाले बहुपद को प्रायः $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ आदि जैसे किसी संकेत से व्यक्त किया जाता है।

बहुपद में चर के अधिकतम घातांक को बहुपद की घात (degree) कहते हैं।

दृष्टांत 1 : x वाले बहुपद $5x^2 + 13x - 9$ की घात 2 है। हम कहते हैं कि यह *दूसरी घात वाला* या *घात 2 वाला बहुपद* है।

दृष्टांत 2 : y वाले बहुपद $y^3 + 17y$ की घात 3 है। हम कहते हैं कि यह *तीसरी घात* या *घात 3 वाला बहुपद* है।

दृष्टांत 3 : p में बहुपद $2p + 3$ की घात 1 है।

दृष्टांत 4 : 3 या –72 जैसे किसी भी *अचर* को *घात 0 वाला बहुपद* कहते हैं, क्योंकि किसी संख्या जैसे कि 3 को हम $3x^0$ समझ सकते हैं।

टिप्पणी : घात दो वाले बहुपद को *द्विघात* (*quadratic*) बहुपद भी कहा जाता है। तीसरी घात वाले बहुपद को *त्रिघात* (*cubic*) बहुपद भी कहा जाता है। चौथी घात वाले बहुपद (उदाहरणतः, $3x^4$ या $2x^4 + 3x^2 + 9x + 4$) को *चतुर्घात* (*biquadratic*) बहुपद भी कहते हैं।

7.3 बहुपद का बहुपद से विभाजन

पूर्णांकों के संदर्भ में, विभाजन की प्रक्रिया याद कीजिए। दो अगल-अलग स्थितियाँ देखने में आती थीं। पहली स्थिति तो वह जहाँ एक पूर्णांक दूसरे पूर्णांक से पूरी तरह विभाजित हो जाता था। उदाहरण के लिए, जब हम 12 को 4 से भाग देते थे, तो भागफल 3 प्राप्त होता था। (इसका अर्थ यह भी था कि 12 को 3 से भाग देने पर भागफल 4 प्राप्त होता था।) वास्तव में, हम केवल $12 \div 4$ को 3 के रूप में सरल कर रहे होते थे। दूसरी स्थिति उन पूर्णांकों के संदर्भ में देखने को मिलती थी जहाँ एक पूर्णांक दूसरे से पूरी तरह विभाजित नहीं होता था और कुछ शेष प्राप्त होता था। उदाहरणतः, 12 को 7 से पूरी तरह विभाजित नहीं किया जा सकता था। 12 को 7 से भाग देने पर भागफल 1 और शेष 5 प्राप्त होता था।

एक चर वाले बहुपदों के संदर्भ में भी जहाँ तक विभाजन की प्रक्रिया का प्रश्न है, ऐसी ही दो स्थितियाँ देखने में आती हैं। कभी-कभी तो केवल सरलीकरण ही किया जाता है; एक बहुपद को किसी बहुपद से भाग देने पर एक बहुपद प्राप्त हो जाता है। परंतु बहुधा ऐसा संयोग नहीं बनता और एक भागफल तथा कुछ शेष प्राप्त होता है। इन दो स्थितियों का उल्लेख हम *शून्य-शेषफल* (*zero-remainder*) तथा *शून्येतर-शेषफल* (*non-zero-remainder*) के रूप में करेंगे।

7.4 बहुपद का बहुपद से विभाजन : शून्य-शेषफल

हम उस सरल दशा से आरंभ करते हैं जहाँ एक बहुपद $p(x)$ को एक दूसरे बहुपद $q(x)$ से विभाजित करने पर कोई तीसरा बहुपद $r(x)$ प्राप्त होता है। याद कीजिए कि भाग देने की प्रक्रिया गुणा करने की प्रक्रिया से एक विशिष्ट रूप में जुड़ी होती है। सर्वाधिक मूलभूत रूप में, पूर्णांकों के प्रत्येक गुणन-तथ्य से, आगे दिखाए अनुसार, दो भाजन-तथ्य प्राप्त होते हैं :

गुणन-तथ्य : $5 \times 4 = 20$

संबद्ध भाजन-तथ्य : $20 \div 5 = 4, 20 \div 4 = 5$

इस विचार का विस्तार हम बहुपदों के विभाजन की प्रक्रिया के लिए कर सकते हैं। यदि कोई बहुपद किन्हीं अन्य दो बहुपदों का गुणनफल हो, तो बहुपदों के इस एक गुणन-तथ्य

से बहुपदों के दो भाजन-तथ्य प्राप्त होते हैं।

इस अध्याय के शेष भाग में, हम यह मानकर चलेंगे कि किसी भी उदाहरण के सभी बहुपदों में वही एक चर आता है। इस प्रकार, हम $p^2 + 3p - 28$ को $p - 4$ से भाग देने की बात तो कर सकते हैं, पर $y - 4$ से नहीं।

7.4.1 एकपदी का एकपदी से विभाजन

दृष्टांत 5 : गुणन-तथ्य : $x^3 \times x^2 = x^5$

संबद्ध भाजन-तथ्य : $x^5 \div x^3 = x^2,\ x^5 \div x^2 = x^3$

इस भाजन-तथ्यों को हम इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$\frac{x^5}{x^3} = x^2,\ \frac{x^5}{x^2} = x^3$$

दृष्टांत 6 : गुणन-तथ्य : $5x^4 \times 3x = 15x^5$

संबद्ध भाजन-तथ्य : $15x^5 \div 5x^4 = 3x,\ 15x^5 \div 3x = 5x^4$

इन भाजन-तथ्यों को हम इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$\frac{15x^5}{5x^4} = 3x,\ \frac{15x^5}{3x} = 5x^4$$

ऊपर के उदाहरणों से लगता है कि संख्याओं के घातांक-नियमों का प्रयोग अक्षर संख्याओं के लिए भी किया जा सकता है। वास्तव में ऐसा करना तथ्यसंगत भी होगा क्योंकि अक्षर संख्याएँ वस्तुतः व्यक्त तो संख्याओं को ही करती हैं। इस प्रकार, किसी एकपदी को किसी एकपदी से विभाजित करने के लिए हमें निम्नलिखित दो नियम प्राप्त होते हैं :

नियम 1 : दो एकपदियों के भागफल का गुणांक उनके गुणांकों का भागफल होता है।

नियम 2 : दो एकपदियों के भागफल में चर वाला भाग दिए गए एकपदियों के चरों वाले भागों के भागफल के बराबर होता है।

उदाहरण 1 : भाग दीजिए : (i) $-20\,x^4$ को $10x$ से (ii) $3y^3$ को $\sqrt{3}y$ से

हल : (i) $\dfrac{-20x^4}{10x} = \left(\dfrac{-20}{10}\right)\left(\dfrac{x^4}{x}\right) = -2x^3$

(ii) $\frac{3y^3}{\sqrt{3}y} = \left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{y^3}{y}\right) = \sqrt{3}y^2$

7.4.2 बहुपद को एकपदी से भाग देना

किसी बहुपद को एक दिए गए एकपदी से भाग देने की दो सुविधाजनक विधियाँ हैं। पहली विधि में भाग की प्रक्रिया निम्नलिखित चरणों में की जाती है :

चरण 1 : दिए गए भाज्य बहुपद के पदों को अलग-अलग लिखिए।

चरण 2 : अब प्रत्येक पद को दिए गए एकपदी से भाग दीजिए।

चरण 3 : प्राप्त भागफलों को जोड़ लीजिए।

आइए, इस विधि को एक उदाहरण के द्वारा समझें।

उदाहरण 2 : $3y^3 + 15y^2 + 12y$ को $3y$ से भाग दीजिए।

हल: चरण 1 : दिए गए बहुपद में ये तीन पद हैं: $3y^3$, $15y^2$ और $12y$ ।

चरण 2 : प्रत्येक पद को दिए गए एकपदी $3y$ से भाग देने पर प्राप्त होता है :

$$\frac{3y^3}{3y}, \frac{15y^2}{3y}, \frac{12y}{3y}$$

या $\quad y^2, \quad 5y, \quad 4$

चरण 3 : ऊपर वाले भागफलों को जोड़ने पर, इच्छित हल $y^2 + 5y + 4$ प्राप्त होता है। अतः,

$$\frac{3y^3 + 15y^2 + 12y}{3y} = y^2 + 5y + 4$$

टिप्पणी : जब प्रक्रिया आपकी समझ में आ जाए तब अगले उदाहरण की भाँति आप हल को संक्षिप्त कर सकते हैं।

उदाहरण 3 : $34x^3 - 17x^2 + 51x$ को $17x$ से भाग दीजिए।

हल : $\frac{34x^3 - 17x^2 + 51x}{17x} = \frac{34x^3}{17x} + \frac{-17x^2}{17x} + \frac{51x}{17x}$

$$= 2x^2 - x + 3$$

दूसरी विधि : हम पहले ही जानते हैं कि बीजीय व्यंजक के गुणनखंड से क्या तात्पर्य है। क्योंकि बहुपद एक विशेष प्रकार का बीजीय व्यंजक ही होता है, अत: हम बहुपद के गुणनखंड का अर्थ भी समझते हैं। हम बहुपदों का गुणनखंडन करना भी सीख चुके हैं। अत: किसी बहुपद को किसी एकपदी से भाग देने के लिए हम उस बहुपद को जिसे भाग दिया जाना है, इस प्रकार गुणनखंडित करते हैं कि गुणनखंडों में से एक, दिया गया एकपदी हो। इसके बाद नीचे दिखाए गए उदाहरण की भाँति भाग की प्रक्रिया अधिक सुविधाजनक रीति से की जा सकती है।

उदाहरण 4 : $4q^3 - 10q^2 + 5q$ को $2q$ से भाग दीजिए।

हल : $4q^3 - 10q^2 + 5q = 2q \times 2q^2 - 2q \times 5q + 2q \times \left(\frac{5}{2}\right)$

$$= 2q \times \left(2q^2 - 5q + \frac{5}{2}\right)$$

अत:, $4q^3 - 10q^2 + 5q = 2q \times \left(2q^2 - 5q + \frac{5}{2}\right)$, जिससे कि

$$\frac{4q^3 - 10q^2 + 5q}{2q} = \frac{2q\left(2q^2 - 5q + \frac{5}{2}\right)}{2q} = 2q^2 - 5q + \frac{5}{2}$$

इच्छित उत्तर प्राप्त करने के लिए हमने अंश और हर में से सार्व गुणनखंड $2q$ को निरस्त कर दिया।

7.4.3 बहुपद को द्विपद से भाग देना : गुणनखंड विधि

अब हम एक बहुपद को द्विपद से भाग देने के लिए उदाहरण 4 की विधि का विस्तार करेंगे। ध्यान रहे कि हम अब भी शून्य-शेषफल वाली दशा पर विचार कर रहे हैं। यदि संभव हो तो उदाहरण 4 की भाँति ही हम भाग दिए जाने वाले बहुपद का गुणनखंडन इस प्रकार करते हैं कि गुणनखंडों में से एक वह द्विपद हो जिससे भाग दिया जाना है। तब सार्व गुणनखंड को निरस्त करने पर हम इच्छित उत्तर प्राप्त कर लेते हैं।

उदाहरण 5 : $a^2 + 4a - 5$ को $a - 1$ से भाग दीजिए।

हल : अध्याय 6 की सर्वसमिका I का प्रयोग करने पर, $a^2 + 4a - 5 = (a + 5)(a - 1)$ प्राप्त होता है।

अत:, $\dfrac{a^2+4a-5}{a-1} = \dfrac{(a+5)(a-1)}{a-1}$

$= a+5$

इच्छित उत्तर प्राप्त करने के लिए हमने अंश और हर में से सार्व गुणनखंड $(a-1)$ को निरस्त कर दिया।

टिप्पणी : बहुपदों को व्यापक रूप में लिखते समय प्राय: चर के लिए x का और अचरों के लिए a, b आदि का प्रयोग किया जाता है। कभी-कभी, जहाँ भ्रम की संभावना न हो, चर के लिए a का भी प्रयोग किया जा सकता है।

7.4.4 बहुपद को द्विपद से भाग देना : दीर्घ-विभाजन विधि

आप समझ चुके होंगे कि यह सदा तो संभव नहीं होगा कि जिस बहुपद को भाग दिया जाना है उसे आप गुणनखंडित कर ही लें। अब एक ऐसी विधि बताई जाएगी जिसके द्वारा आप किसी भी बहुपद को एक दिए गए द्विपद से भाग दे पाएँगे। इस विधि को *दीर्घ-विभाजन विधि* कहते हैं। इस विधि को हम उदाहरणों की सहायता से समझाएँगे।

याद कीजिए कि पूर्णांकों की बात करते समय जिस पूर्णांक को भाग दिया जाता है उसे भाज्य (dividend) और जिस पूर्णांक से भाग दिया जाता है उसे भाजक (divisor) कहते हैं। बहुपदों के लिए भी हम इन्हीं पदों का प्रयोग करेंगे। पदों, भागफल और शेष का अर्थ भी उसी प्रकार लिया जाएगा।

उदाहरण 6 : $12-14x^2-13x$ को $3+2x$ से भाग दीजिए।

हल : भाग की प्रक्रिया निम्नलिखित चरणों में की जाएगी :

चरण 1 : भाज्य $(12-14x^2-13x)$ और भाजक $(3+2x)$ को मानक रूप में लिखिए। ऐसा करने पर प्राप्त होता है : भाज्य : $-14x^2-13x+12$ और भाजक : $2x+3$

चरण 2 : भाज्य के पहले पद को भाजक के पहले पद से भाग देते हैं। अर्थात् $-14x^2$ को $2x$ से भाग देकर $-7x$ प्राप्त करते हैं। इस प्रकार, भागफल का प्रथम पद प्राप्त होता है : $-7x$

$\dfrac{-14x^2}{2x} = -7x$

$$\begin{array}{r} -7x \\ 2x\overline{)-14x^2} \\ \underline{\mp 14x^2} \\ 0 \end{array}$$

भागफल $= -7x$

चरण 3 : भाजक को भागफल के प्रथम पद से गुणा कर गुणनफल को भाज्य में से घटाते हैं। अर्थात् $2x + 3$ को $-7x$ से गुणा कर, हम गुणनफल $-14x^2 - 21x$ को भाज्य $-14x^2 - 13x + 12$ में से घटाते हैं। ऐसा करने पर, शेष $8x + 12$ प्राप्त होता है।

$$(2x+3)\times(-7x) = -14x^2 - 21x \quad \Big| \quad \begin{array}{r} -14x^2 - 13x + 12 \\ \underset{+}{-}14x^2 \underset{+}{-} 21x \\ \hline 8x + 12 \end{array}$$

चरण 4 : ऊपर प्राप्त शेषफल $8x + 12$ को नया भाज्य मानेंगे। भाजक वही रहेगा। अब चरण 2 को दोहराकर, हम भागफल का अगला पद प्राप्त करते हैं। अर्थात् भाज्य के पहले पद ($8x$) को भाजक के पहले पद ($2x$) से भाग देकर, हम 4 प्राप्त करते हैं। इस प्रकार, 4 भागफल का दूसरा पद हुआ।

$$\frac{8x}{2x} = 4 \quad \Big| \quad \begin{array}{l} \text{भागफल} \\ -7x + 4 \end{array}$$

चरण 5 : भाजक को भागफल के अभी-अभी प्राप्त पद से गुणा कर गुणनफल को भाज्य में से घटाते हैं। अर्थात् $2x + 3$ को 4 से गुणा कर गुणनफल $8x + 12$ को भाज्य $8x + 12$ में से घटाते हैं। ऐसा करने पर, शेष 0 प्राप्त होता है।

$$(2x+3)\times 4 = 8x + 12 \quad \Big| \quad \begin{array}{r} 8x + 12 \\ \underset{-}{}8x \underset{-}{+} 12 \\ \hline 0 \end{array}$$

चरण 6 : इस प्रकार, पूरा भागफल $-7x + 4$ और शेष शून्य है। अतः, हम कहते हैं कि

$$(-14x^2 - 13x + 12) \div (2x + 3) = -7x + 4$$

ऊपर की प्रक्रिया इस प्रकार दिखाई जाती है :

$$\begin{array}{r} -7x + 4 \\ 2x+3 \overline{\big)\, -14x^2 - 13x + 12} \\ \underset{+}{-}14x^2 \underset{+}{-} 21x \quad\quad \\ \hline 8x + 12 \\ \underset{-}{}8x \underset{-}{+} 12 \\ \hline 0 \end{array}$$

ध्यान दीजिए कि $-14x^2 - 13x + 12 = (2x + 3)(-7x + 4)$ (1)

अर्थात् भाज्य = भाजक × भागफल

इस प्रकार, संबंध (1) से ज्ञात होता है कि $(2x + 3)$ और $(-7x + 4)$, दोनों ही $-14x^2 - 13x + 12$ के गुणनखंड हैं। दूसरे शब्दों में, इस उदाहरण में *भाजक और भागफल,*

दोनों ही भाज्य के गुणनखंड हैं। आइए, एक और उदाहरण लें।

उदाहरण 7 : $2 + 7x + 7x^2 + 2x^3$ को $1 + 2x$ से भाग दीजिए।

हल : भाग की प्रक्रिया को हम निम्नलिखित चरणों में करते हैं :

चरण 1 : हम भाज्य $(2 + 7x + 7x^2 + 2x^3)$ और भाजक $(1 + 2x)$ को मानक रूप में लिखते हैं। ऐसा करने पर हमें प्राप्त होता है : भाज्य : $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2$, भाजक : $2x + 1$

चरण 2 : भाज्य के पहले पद को हम भाजक के पहले पद से भाग देते हैं। अर्थात् $2x^3$ को $2x$ से भाग देकर, हम x^2 प्राप्त करते हैं। इस प्रकार, हमें भागफल का प्रथम पद प्राप्त होता है : x^2

$$\frac{2x^3}{2x} = x^2 \qquad \text{भागफल } x^2$$

चरण 3 : हम भाजक को भागफल के प्रथम पद से गुणा कर गुणनफल को भाज्य में से घटाते हैं। अर्थात् $2x + 1$ को x^2 से गुणा कर गुणनफल $2x^3 + x^2$ को भाज्य $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2$ में से घटाते हैं। ऐसा करने पर, हमें शेष $6x^2 + 7x + 2$ प्राप्त होता है।

$$(2x+1)\times x^2 = 2x^3 + x^2 \qquad \begin{array}{r} 2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 \\ \underline{\overset{-}{}2x^3 \pm x^2 } \\ 6x^2 + 7x + 2 \end{array}$$

चरण 4 : हम ऊपर प्राप्त शेषफल $6x^2 + 7x + 2$ को नया भाज्य मानते हैं। भाजक वही रहता है। चरण 2 को दोहराकर, हम भागफल का अगला पद प्राप्त करते हैं। अर्थात् भाज्य के पहले पद $(6x^2)$ को भाजक के पहले पद $(2x)$ से भाग देकर, हम $3x$ प्राप्त करते हैं। इस प्रकार, $3x$ भागफल का दूसरा पद हुआ।

$$\frac{6x^2}{2x} = 3x \qquad \text{भागफल } x^2 + 3x$$

चरण 5 : भाजक को भागफल के अभी-अभी प्राप्त पद से गुणा कर गुणनफल को हम भाज्य में से घटाते हैं। अर्थात् $2x + 1$ को $3x$ से गुणा कर गुणनफल $6x^2 + 3x$ को भाज्य $6x^2 + 7x + 2$ में से घटाते हैं। ऐसा करने पर, हमें शेष $4x + 2$ प्राप्त होता है।

$$(2x+1)\times 3x = 6x^2 + 3x \qquad \begin{array}{r} 6x^2 + 7x + 2 \\ \underline{-6x^2 \pm 3x } \\ 4x + 2 \end{array}$$

चरण 6 : ऊपर प्राप्त शेष $4x + 2$ को हम नया भाज्य मानते हैं। भाजक वही रहता है। चरण 2 को दोहराकर, हम भागफल का अगला पद प्राप्त करते हैं। अर्थात् भाज्य के पहले पद $(4x)$ को भाजक के पहले पद $(2x)$ से भाग देकर, हम भागफल का अगला पद 2 प्राप्त करते हैं।

$$\frac{4x}{2x} = 2 \qquad \text{भागफल } x^2 + 3x + 2$$

चरण 7 : भाजक को भागफल के अभी-अभी प्राप्त पद से गुणा कर, हम गुणनफल को भाज्य में से घटाते हैं। अर्थात् $2x + 1$ को 2 से गुणा कर गुणनफल $4x + 2$ को भाज्य $4x + 2$ में से घटाते हैं। ऐसा करने पर, हमें शेष 0 प्राप्त होता है।

$$(2x+1)\times 2 = 4x+2 \quad \begin{array}{r} 4x+2 \\ \underline{-4x\mp 2} \\ 0 \end{array}$$

चरण 8 : इस प्रकार, पूरा भागफल $x^2 + 3x + 2$ है और शेष शून्य है। अतः, यह कहा जा सकता है कि $(2x^3 + 7x^2 + 7x + 2) \div (2x + 1) = x^2 + 3x + 2$

ऊपर की प्रक्रिया इस प्रकार दिखाई जाती है :

$$\begin{array}{r|l} & x^2+3x+2 \\ \hline 2x+1 & 2x^3+7x^2+7x+2 \\ & \underline{-2x^3 \mp x^2} \\ & \quad 6x^2+7x+2 \\ & \quad \underline{-6x^2 \mp 3x} \\ & \qquad 4x+2 \\ & \qquad \underline{-4x \mp 2} \\ & \qquad\quad 0 \end{array}$$

ध्यान दें : $(2x^3 + 7x^2 + 7x + 2) = (2x + 1)(x^2 + 3x + 2)$ (1)

अर्थात् भाज्य = भाजक × भागफल

इस प्रकार, संबंध (1) से स्पष्ट हो रहा है कि $(2x + 1)$ और $(x^2 + 3x + 2)$, दोनों ही $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2$ के गुणनखंड हैं। दूसरे शब्दों में, *भाजक और भागफल दोनों, इस उदाहरण में भी भाज्य के गुणनखंड हैं।*

ऊपर के दो उदाहरण इस बात को इंगित करते हैं कि पूर्णांकों के लिए सत्य निम्नलिखित परिणाम बहुपदों के लिए भी सत्य है :

किसी पूर्णांक m को पूर्णांक n से भाग देने पर यदि शेष 0 और भागफल q मिले, तो $m = nq$ होगा। इस प्रकार, n पूर्णांक m का गुणनखंड होगा।

दूसरो शब्दों में, *यदि शेष 0 हो, तो भाज्य = भाजक × भागफल होता है।* अतः, बहुपदों के लिए भी निम्न सत्य है :

किसी बहुपद $f(x)$ को बहुपद $g(x)$ से भाग देने पर यदि शेष 0 और भागफल $q(x)$ मिले, तो $f(x) = g(x)\, q(x)$ होगा। इस प्रकार, $g(x)$ बहुपद $f(x)$ का गुणनखंड होगा।

दूसरे शब्दों में, बहुपदों के लिए भी निम्न सत्य है :

यदि शेष 0 हो, तो भाज्य = भाजक × भागफल

टिप्पणियाँ : 1. भाज्य, भाजक और भागफल में ऊपर दिया गया संबंध इस बात का निर्णय करने में अत्यंत उपयोगी सिद्ध होता है कि एक दिया गया बहुपद किसी बहुपद का गुणनखंड है या नहीं।

2. शेष के शून्य होने पर केवल भाजक ही नहीं अपितु भागफल भी भाज्य का गुणनखंड होता है।

3. ऊपर दिए हल के चरणों को इतने विस्तार से लिखने की आवश्यकता नहीं है। इनको इसलिए लिखा गया कि आप प्रक्रिया को समझ लें। अगले उदाहरण में दिखाए गए अनुसार भाग किया जाता है।

उदाहरण 8 : ज्ञात कीजिए कि $6x + 5$, बहुपद $6x^2 - 7x - 10$ का गुणनखंड है या नहीं।

हल : आइए, $6x^2 - 7x - 10$ को $6x + 5$ से भाग दें।

$$
\begin{array}{r|l}
 & x-2 \\
6x+5 & 6x^2 - 7x - 10 \\
 & \underline{\overset{-}{6x^2} \overset{-}{+} 5x} \\
 & -12x - 10 \\
 & \underline{\overset{+}{-12x} \overset{+}{-} 10} \\
 & 0
\end{array}
$$

क्योंकि शेष शून्य है, अतः $6x + 5$, $6x^2 - 7x - 10$ का एक गुणनखंड है।

प्रश्नावली 7.1

1. निम्नलिखित व्यंजकों में से कौन-कौन से व्यंजक बहुपद नहीं हैं?

(i) $3z^3 - \sqrt{5}z + 9$ (ii) $3\sqrt{z} + 4z + 5z^2$

(iii) $\sqrt{a}x + x^2 - x^3$ (iv) $\sqrt{a}\,x^{\frac{1}{2}} + ax + 9x^2 + 5$

(v) $2x^{-2} + 3x^{-1} + 4 + 5x$ (vi) $x^2 + x^{-2}$

निम्नलिखित प्रत्येक बहुपद को उसके मानक रूप में लिखिए। साथ ही, प्रत्येक की घात भी लिखिए :

2. $y^2 + 6y + 9 + 4y^4$

3. $4q^2 - 13q^5 + 12q$

4. $\left(z+\frac{3}{4}\right)\left(z+\frac{4}{3}\right)$

5. $(x^2 + 4)(x^2 + 9)$

6. $y^2 + 12 - 5y^8$

7. $q^2 + 4q^8 - q^6$

8. $p^2 + 16 + p^7$

9. $y^2 + y^3 - \frac{5}{7}y^{11}$

10. $(z^3 - 14)(z^3 - 1)$

11. $(z^3 - 1)(z^3 - 8)$

12. $(y^3 - 2)(y^3 + 11)$

13. $\left(x^3 - \frac{3}{8}\right)\left(x^3 + \frac{16}{17}\right)$

भाग दीजिए :

14. $2x^2$ को $2x$ से

15. $-3x^3$ को x^2 से

16. $\frac{2}{3}x^2$ को x से

17. $\sqrt{5}x^4$ को $5x^3$ से

18. $\sqrt{3}\,a^3$ को $2a$ से

19. $4a^4$ को $-2\sqrt{2}a^2$ से

20. $x + 2x^2 + 3x^3$ को $2x$ से

21. $y^4 - 3y^3 + \frac{1}{2}y^2$ को $3y$ से

22. $-4p^3 + 4p^2 + p + 4$ को $2p$ से

23. $-x^4 + x^2$ को $\sqrt{2}\,x^2$ से

24. $5z^3 - 6z^2 + 7z$ को $2z$ से

25. $\sqrt{3}q^4 + 2\sqrt{3}q^3$ को $3q^2$ से

26. दीर्घ-विभाजन विधि द्वारा भाग दीजिए। गुणनखंडन विधि से उत्तर का सत्यापन कीजिए :

(i) $x^2 + 6x + 8$ को $x + 4$ से

(ii) $x^2 + 7x + 10$ को $x + 5$ से

(iii) $y^2 - y - 12$ को $y - 4$ से

(iv) $y^2 - 5y + 6$ को $y - 2$ से

(v) $z^2 - 8z + 15$ को $z - 5$ से

(vi) $x^4 + 3x^2 + 2$ को $x^2 + 2$ से

[*संकेत* : $x^2 = y$ लिखिए।]

27. संबद्ध शेष को शून्य दिखाकर सत्यापित कीजिए कि दिया गया द्विपद दिए गए बहुपद का एक गुणनखंड है :

(i) $2x + 3,\ 2x^2 + 5x + 3$

(ii) $2x + 1,\ 6x^2 + x - 1$

(iii) $2y - 1,\ 8y^2 - 2y - 1$

(iv) $5a + 3,\ 10a^2 - 9a - 9$

(v) $3b - 1,\ -3b^2 + 13b - 4$

(vi) $p^2 + 3,\ 4p^4 + 7p^2 - 15$

7.5 बहुपद को बहुपद से भाग देना : शून्येतर शेष

अभी तक हम उस स्थिति की बात कर रहे थे जहाँ किसी बहुपद को एक एकपदी अथवा द्विपद से भाग देने पर कुछ शेष नहीं बचता था (अर्थात् शून्य शेष रहता था)। संख्याओं की भाँति यहाँ भी यह कहा जाता है कि संबद्ध एकपदी अथवा द्विपद बहुपद को पूरी तरह या ठीक-ठीक विभाजित करता है। अब उस स्थिति पर विचार किया जाएगा जहाँ शेष शून्य नहीं होता।

याद कीजिए कि संख्याओं में भाग की प्रक्रिया तब तक किए चले जाते हैं जब तक कि शेष, भाजक से छोटा नहीं हो जाता। बहुपदों में एक बहुपद के दूसरे से छोटा होने की बात नहीं की जाती। इसके स्थान पर हम भाजक और शेष की घातों की तुलना करते हैं। बहुपदों की घातों के पूर्णांक होने के कारण इनकी तुलना की जा सकती है। बहुपदों के लिए भाग की प्रक्रिया तब तक किए चले जाते हैं जब तक कि ऐसा शेष न प्राप्त हो जाए जिसकी घात भाजक की घात से छोटी हो। इस प्रक्रिया को हम एक उदाहरण द्वारा समझाएँगे।

उदारहण 9 : बहुपद $5x(x^2 - x + 1) - (9 + 4x^4)$ को $4x - 1$ से भाग दीजिए।

उदाहरण : दिया गया बहुपद मानक रूप में नहीं है। आइए, पहले इसे मानक रूप में लिखें।

$$5x(x^2 - x + 1) - (9 + 4x^4) = 5x^3 - 5x^2 + 5x - 9 - 4x^4$$
$$= -4x^4 + 5x^3 - 5x^2 + 5x - 9$$

अब हम पिछले अनुच्छेद में समझाई गई विधि से भाग की प्रक्रिया करते हैं।

$$\begin{array}{r|l} & -x^3 + x^2 - x + 1 \\ \hline 4x - 1 & -4x^4 + 5x^3 - 5x^2 + 5x - 9 \\ & \underset{+}{-}4x^4 \underset{-}{+} x^3 \\ \hline & 4x^3 - 5x^2 + 5x - 9 \\ & \underset{-}{4x^3} \underset{+}{-} x^2 \\ \hline & -4x^2 + 5x - 9 \\ & \underset{+}{-}4x^2 \underset{-}{+} x \\ \hline & 4x - 9 \\ & \underset{-}{4x} \underset{+}{-} 1 \\ \hline & -8 \end{array}$$

(शेष की घात भाजक की घात से छोटी नहीं; भाग की प्रक्रिया करते रहिए।)

(शेष की घात भाजक की घात से छोटी नहीं; भाग की प्रक्रिया करते रहिए।)

(शेष की घात भाजक की घात से छोटी नहीं; भाग की प्रक्रिया करते रहिए।)

(शेष की घात भाजक की घात से छोटी है; भाग की प्रक्रिया समाप्त कीजिए।)

इस प्रकार, भागफल $-x^3 + x^2 - x + 1$ है और शेष -8 है।

ध्यान दीजिए कि ऊपर के उदाहरण में,

$$-4x^4 + 5x^3 - 5x^2 + 5x - 9 = (4x - 1) \times (-x^3 + x^2 - x + 1) + (-8)$$

दूसरे शब्दों में, *भाज्य* = *भाजक* × *भागफल* + *शेष*

उदारहण 10 : बहुपद $3y^4 - y^3 + 12y^2 + 2$ को $3y^2 - 1$ से भाग दीजिए।

हल : हम भाग की प्रक्रिया पिछले अनुच्छेद में समझाई गई विधि से करेंगे।

$$
\begin{array}{r|l}
 & y^2 - \frac{1}{3}y + \frac{13}{3} \\
\hline
3y^2 - 1 & 3y^4 - y^3 + 12y^2 \qquad + 2 \\
 & \underline{\overset{-}{3y^4} \qquad \overset{+}{-} \; y^2} \\
 & -y^3 + 13y^2 \qquad + 2 \\
 & \underline{\overset{+}{-y^3} \qquad \overset{-}{+} \frac{1}{3}y} \\
 & 13y^2 - \frac{1}{3}y + 2 \\
 & \underline{\overset{-}{13y^2} \qquad \overset{+}{-} \frac{13}{3}} \\
 & -\frac{1}{3}y + \frac{19}{3}
\end{array}
$$

(y में अनुपस्थित पद के लिए खाली (रिक्त) स्थान छोड़कर। समान पदों को एक-दूसरे के नीचे लिखना महत्त्वपूर्ण है, भले ही कुछ स्थान खाली क्यों न छोड़ने पड़ें।)

(शेष की घात भाजक की घात से छोटी नहीं; भाग की प्रक्रिया करते रहिए।)

(शेष की घात भाजक की घात से छोटी नहीं; भाग की प्रक्रिया करते रहिए।)

(शेष की घात भाजक की घात से छोटी है; भाग की प्रक्रिया समाप्त कीजिए।)

इस प्रकार, $3y^4 - y^3 + 12y^2 + 2$ को $3y^2 - 1$ से भाग देने पर भागफल $y^2 - \frac{1}{3}y + \frac{13}{3}$ और शेष $-\frac{1}{3}y + \frac{19}{3}$ प्राप्त होता है। ध्यान दीजिए कि

$$3y^4 - y^3 + 12y^2 + 2 = (3y^2 - 1) \times \left(y^2 - \frac{1}{3}y + \frac{13}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}y + \frac{19}{3}\right)$$

दूसरे शब्दों में, इस उदाहरण में भी,

भाज्य = *भाजक* × *भागफल* + *शेष*

वास्तव में, यह संबंध सदैव सत्य होता है। कारण यह है कि यदि हम (भाज्य-शेष) को भाजक से भाग दें, तो शेष शून्य होगा। अतः, पिछले अनुच्छेद की भाँति

भाज्य - शेष $=$ भाजक $\times$ भागफल

भाज्य $=$ भाजक $\times$ भागफल $+$ शेष

टिप्पणी : ऊपर के संबंध से हमें यह निर्णय करने में सहायता मिलती है कि दो दिए गए बहुपदों में कोई सा एक दूसरे का गुणनखंड है या नहीं। क्योंकि शेष के शून्य न होने पर भाजक और भागफल में से कोई भी भाज्य का गुणनखंड नहीं होता है।

आइए, बहुपदों की दीर्घ-विभाजन विधि से संबद्ध महत्त्वपूर्ण तथ्यों को अभिलेखित कर लें:

1. भाग की प्रक्रिया आरंभ करने से पहले भाज्य और भाजक को मानक रूप में लिखना आवश्यक है। अर्थात् भाज्य और भाजक दोनों के पदों को चर के घातांकों के अवरोही क्रम में लिख लेना चाहिए।
2. भाग करते समय समान पदों को एक-दूसरे के ऊपर-नीचे लिखिए। ऐसा करने पर प्रत्येक चरण में आपको अनुपस्थित पदों के लिए रिक्त स्थान छोड़ने होंगे।
3. तब तक भाग देते रहिए जब तक कि प्राप्त शेष की घात भाजक की घात से छोटी न हो जाए।
4. जब प्राप्त शेष की घात भाजक की घात से छोटी हो जाए, तब भाग देना बंद कर दीजिए। ये ही अभीष्ट शेष है।
5. यदि शेष शून्य है, तो भाजक भाज्य का गुणनखंड है। अत: यह जानने के लिए कि कोई दिया गया बहुपद $f(x)$ किसी बहुपद $g(x)$ का गुणनखंड है या नहीं, हम $g(x)$ को $f(x)$ से भाग देकर शेष की जाँच करते हैं। यदि शेष शून्य है, तो भाजक, भाज्य का गुणनखंड है, अन्यथा नहीं।

7.5.1 दीर्घ विभाजन का एक तुरंत और लघु रूप

आगे *दीर्घ* विभाजन की एक वैकल्पिक विधि बताई जा रही है, जो बहुत *छोटी* है। माना कि हम $x^3 + 4x^2 - 3x - 7$ को $x - 3$ से भाग देना चाहते हैं। भाज्य बहुपद को सबसे ऊपर की पंक्ति में लिखिए। अब एक पंक्ति रिक्त छोड़िए। एक रेखा खींचिए। रेखा के नीचे, संख्यात्मक गुणांक के लिए रिक्त स्थान छोड़ते हुए भाजक को तीन बार लिखिए, जैसा कि साथ में दिखाया गया है।

$$\begin{array}{ccc} x^3 + 4x^2 & - 3x & - 7 \\ \hline (x-3) & (x-3) & (x-3) \end{array}$$

सामान्य विधि की भाँति भागफल का पहला पद निकालिए जो यहाँ x^2 है। रेखा के नीचे वाले पहले '$(x-3)$' को x^2 से गुणा कर रिक्त पंक्ति में लिखिए। x^3 वाला पद तो ठीक हो गया। x^2 वाले पद को ठीक पाने के लिए हम बीच की पंक्ति में $7x^2$ लिखते हैं (जिससे कि $-3x^2$ के साथ मिलकर यह भाज्य का x^2 वाला पद $4x^2$ दे दे)। $7x^2$ से हमें भागफल का दूसरा पद $7x$ प्राप्त होता है। नीचे की पंक्ति में दूसरे $(x-3)$ से पहले $+7x$ लिखिए। '$(7x^2$' को पूरा करते हुए गुणनफल $(7x^2 - 21x)$ को बीच की पंक्ति में लिखिए।

$$\begin{array}{l} x^3 \quad + 4x^2 \quad - 3x \quad - 7 \\ \underline{(x^3 - 3x^2) + (7x^2} \\ \underline{\underline{x}}^2 (x-3) \quad (x-3) \quad (x-3) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x^3 \quad + 4x^2 - 3x \quad - 7 \\ \underline{(x^3 - 3x^2) + (7x^2 - 21x)} \\ \underline{\underline{x}}^2 (x-3) + \underline{\underline{7x}}(x-3) \quad (x-3) \end{array}$$

अब बीच की पंक्ति में $(18x$ लिखकर x वाले पद को ठीक कर लीजिए। इससे भागफल का अगला पद 18 प्राप्त होता है।

$$\begin{array}{l} x^3 \quad + 4x^2 \quad - 3x \quad - 7 \\ \underline{(x^3 - 3x^2) + (7x^2 - 21x) + (18x} \\ \underline{\underline{x}}^2 (x-3) + \underline{\underline{7x}}(x-3) \quad (x-3) \end{array}$$

नीचे की पंक्ति के अंतिम $(x-3)$ को 18 से गुणा कर गुणनफल को बीच की पंक्ति में लिखिए। अंत में बीच की पंक्ति में 47 लिखकर अचर पद को ठीक कर लीजिए। यह पद 47 शेष है। पूरा परिणाम साथ में दिखाया गया है।

$$\begin{array}{l} x^3 \quad + 4x^2 - 3x \quad - 7 \\ \underline{(x^3 - 3x^2) + (7x^2 - 21x) + (18x - 54) + 47} \\ \underline{\underline{x}}^2 (x-3) + \underline{\underline{7x}}(x-3) + \underline{\underline{18}} \ (x-3) \end{array}$$

इस प्रकार, भागफल $x^2 + 7x + 18$ है (पदों के नीचे दो रेखिकाओं से प्रदर्शित)। साथ ही, शेष 47 है।

प्रश्नावली 7.2

पहले बहुपद को दूसरे बहुपद से भाग दीजिए। भागफल और शेष लिखिए :

1. $3a^2 + 5a + 7, a + 2$

2. $10b^2 + 7b + 8, 5b - 3$

3. $6p^3 + 5p^2 + 4, 2p + 1$

4. $8q^3 + 6q^2 + 4q - 1, 4q + 2$

5. $12x^3 - 8x^2 - 6x + 10, 3x - 2$

6. $16x^4 + 12x^3 - 10x^2 + 8x + 20, 4x - 3$

7. $5y^3 - 6y^2 + 6y - 1, 5y - 1$

8. $z^4 + z^3 + z^2, z + 1$

9. $x^4 - x^3 + 5x, x - 1$

10. $y^4 + y^2, y^2 - 2$

11. ऊपर के सभी प्रश्नों के लिए, परिणाम *भाज्य = भाजक × भागफल + शेष* का सत्यापन कीजिए।

शेष की संभाव्य घातें क्या हो सकती हैं, जब हम भाग दें:

12. $x^4 + x^3$ को $x + 9$ से?

13. $x^2 + x + 1$ को $x - 2$ से?

14. $x^4 + 10x^3 - 9$ को $x^3 + 4$ से?

15. $y^4 + y^2 - y - 3$ को $y^2 + 6$ से?

ज्ञात कीजिए कि पहला बहुपद दूसरे बहुपद का गुणनखंड है या नहीं :

16. $x + 1, 2x^2 + 5x + 4$

17. $3x - 1, 6x^2 + x - 1$

18. $4y + 1, 8y^2 - 2y + 1$

19. $2a - 3, 10a^2 - 9a - 5$

20. $4 - z, 3z^2 - 13z + 4$

21. $4z^2 - 5, 4z^4 + 7z^2 + 15$

22. $y - 2, 3y^3 + 5y^2 + 5y + 2$

याद रखने योग्य बातें

1. ऐसे बीजीय व्यंजकों को जिनके चरों के घातांक केवल ऋणेतर पूर्णांक हो, बहुपद कहा जाता है।
2. जिस बहुपद में केवल एक चर आता हो उसे एक चर वाला (या एक चर में) बहुपद कहते हैं।
3. एक चर वाले बहुपद के विभिन्न पदों के घातांकों में से सबसे बड़े घातांक को बहुपद की घात कहा जाता है।
4. अचर शून्य घात वाला बहुपद होता है।
5. एक चर वाले बहुपद का मानक रूप वह होता है जिसमें बहुपद के पद चर के घातांकों के घटते हुए क्रम में लिखे जाते हैं।
6. दो एकपदियों के भागफल का गुणांक उन एकपदियों के गुणांकों का भागफल होता है।
7. दो एकपदियों के भागफल में चर वाला भाग उन एकपदियों के चर वाले भागों का भागफल होता है।
8. यदि किसी बहुपद (भाज्य) को किसी बहुपद (भाजक) से भाग देने पर शेष शून्य रहे, तो भाजक भाज्य का एक गुणनखंड होता है। ऐसी स्थितियों में भागफल भी भाज्य का एक गुणनखंड होता है। साथ ही,

   भाज्य = भाजक × भागफल

9. व्यापक रूप से,

भाज्य = भाजक × भागफल + शेष

10. शेष की घात भाजक की घात से सदैव छोटी होती है।

11. दीर्घ-विभाजन की प्रक्रिया करने से पहले भाज्य तथा भाजक दोनों को मानक रूप में लिखना आवश्यक है।

12. दीर्घ-विभाजन करते समय, आवश्यकतानुसार रिक्त स्थान छोड़ते हुए, समान पदों को एक-दूसरे के ऊपर-नीचे लिखा जाता है।

अध्याय

8

एक चर वाले समीकरण

8.1 भूमिका

आप एक चर वाले रैखिक समीकरणों से परिचित हैं। ऐसे समीकरण का रूप $ax + b = c$ के प्रकार का होता है, जहाँ a, b और c संख्याएँ होती हैं, $a \neq 0$ और x चर होता है। चर राशि x का ऐसा मान जो समीकरण को संतुष्ट करे, समीकरण का हल या मूल कहलाता है। याद कीजिए कि निम्नलिखित क्रियाओं से समीकरण के तुल्यता चिह्न (=) में कोई परिवर्तन नहीं होता :

- समीकरण के दोनों पक्षों में समान संख्या जोड़ना।
- समीकरण के दोनों पक्षों में समान संख्या घटाना।
- समीकरण के दोनों पक्षों को समान शून्येतर संख्या से गुणा करना या भाग देना।
- किसी पद का पक्षांतरण करना।

आप जानते हैं कि दैनिक जीवन की कुछ वास्तविक समस्याओं का हल उन्हें रैखिक समीकरणों में परिवर्तित कर और फिर उन समीकरणों को हल कर किया जा सकता है। यह क्रियाकलाप इस अध्याय में आगे बढ़ाया जाएगा।

इस अध्याय में, हम

$$\frac{ax+b}{cx+d} = k, \text{ जहाँ } a, b, c, d \text{ और } k \text{ संख्याएँ हैं और } cx + d \neq 0 \text{ हैं,}$$

जैसे समीकरणों को रैखिक समीकरणों में परिवर्तित कर हल करना सीखेंगे। इसके पश्चात्, हम कुछ शाब्दिक समस्याओं को ऊपर जैसे समीकरणों में परिवर्तित कर हल करेंगे।

8.2 $\frac{ax+b}{cx+d} = k$ के रूप वाले समीकरण

आइए, अनुपात 7:8 वाली दो ऐसी संख्याएँ खोजने का प्रयास करें जिनका योगफल (योग) 45 हो। ऐसी संख्याएँ खोजने के लिए यह मान लेते हैं कि दोनों में से छोटी संख्या x है। क्योंकि दोनों संख्याओं का योगफल 45 है, अतः दूसरी संख्या $45-x$ हुई। क्योंकि संख्याओं में 7:8 का अनुपात है, अतः आवश्यक होगा कि

$$\frac{x}{45-x}=\frac{7}{8}$$

यहाँ से,

$\frac{ax+b}{cx+d}=k$ के रूप वाला एक समीकरण प्राप्त होता है, जहाँ $a=1, b=0, c=-1,$ $d=45$ और $k=\frac{7}{8}$ है। इस प्रकार, ऊपर दी गई समस्या को हल करने के लिए, हमें $\frac{ax+b}{cx+d}=k$ जैसे समीकरण को हल करना पड़ेगा। स्पष्टतः, यह समीकरण रैखिक नहीं है। परंतु हम ऐसे समीकरण को रैखिक समीकरण में परिवर्तित कर सकते हैं। उसके बाद हम इसे सरलता से हल कर सकते हैं। आइए, कुछ उदाहरणों द्वारा इसे स्पष्ट करें।

उदाहरण 1 : समीकरण $\frac{3x+8}{2x+7}=4$ को हल कीजिए।

हल : ध्यान दीजिए कि यदि LHS के हर में $2x+7$ न होता, तो यह समीकरण एक रैखिक समीकरण होता। इसलिए हम इस व्यंजक से मुक्त होने का प्रयास करेंगे। याद कीजिए कि अक्षर संख्याएँ किन्हीं संख्याओं को ही निरूपित करती हैं। इस प्रकार, x, अतः $2x+7, 3x+8$ तथा $\frac{3x+8}{2x+7}$ भी संख्याओं को ही निरूपित करते हैं। अतएव हम दिए गए समीकरण $\frac{3x+8}{2x+7}=4$ के दोनों पक्षों को, तुल्यता चिह्न को प्रभावित किए बिना, $2x+7$ से गुणा कर सकते हैं। ऐसा करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{3x+8}{2x+7}\times(2x+7)=4(2x+7)$$

या $\quad 3x+8=8x+28$

या $\quad 3x-8x=28-8$ ($8x$ का LHS और 8 का RSH में पक्षांतरण करने पर)

या $\quad -5x=20$

या $\quad x=-4$

जाँच : जब $x = -4$, तब

$$\text{LHS} = \frac{3(-4)+8}{2(-4)+7} = \frac{-4}{-1} = 4 = \text{RHS}$$

अतः, हल सही है।

उदाहरण 2 : समीकरण $\frac{5x+2}{2x+3} = \frac{12}{7}$ को हल कीजिए।

हल : आइए, पिछले उदाहरण की भाँति समीकरण के दोनों पक्षों को $2x + 3$ से गुणा करें। ऐसा करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{5x+2}{2x+3} \times (2x+3) = \frac{12}{7} \times (2x+3)$$

या $$5x+2 = \frac{12}{7}(2x+3) \qquad (1)$$

या $$5x+2 = \frac{24}{7}x + \frac{36}{7}$$

या $$5x - \frac{24}{7}x = \frac{36}{7} - 2 \qquad \left[\frac{24}{7}x \text{ और 2 के पक्षांतरण से}\right]$$

या $$\frac{11}{7}x = \frac{22}{7}$$

या $$x = \frac{22}{7} \times \frac{7}{11} \qquad \left[\text{दोनों पक्षों को } \frac{7}{11} \text{ से गुणा करने पर}\right]$$

या $$x = 2$$

जाँच : $x = 2$ पर,

$$\text{LHS} = \frac{5x+2}{2x+3} = \frac{5\times 2+2}{2\times 2+3} = \frac{12}{7} = \text{RHS}$$

अतः, हल सही है।

टिप्पणी : जिस प्रकार हमने LHS के हर $2x + 3$ को हटाया है, उसी प्रकार हम RHS के हर 7 को भी हटा सकते थे। यदि हम ऐसा करते, तो हमें भिन्नों का प्रयोग नहीं करना पड़ता। आइए, ऊपर वाले हल में सुधार करें। समीकरण (1) के दोनों पक्षों को 7 से गुणा करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$(5x+2) \times 7 = \frac{12(2x+3)}{7} \times 7$$

या $$7(5x + 2) = 12(2x + 3) \quad (2)$$

या $$35x + 14 = 24x + 36$$

या $$11x = 22$$

या $$x = 2,$$ पहले की भाँति

हल में और अधिक सुधार किया जा सकता था। $2x + 3$ और 7 से दो अलग-अलग बार गुणा करने के स्थान पर, हम समीकरण के दोनों पक्षों को एक ही बार में $7(2x + 3)$ से गुणा कर सकते थे। ऐसा करने पर, हमें प्राप्त होता :

$$\frac{5x+2}{2x+3} \times 7(2x+3) = \frac{12}{7} \times 7(2x+3)$$

या $$7(5x + 2) = 12(2x + 3) \quad (3)$$

जो समीकरण (2) ही है। इस प्रकार, समीकरण का हल कुछ सरल हो जाता है।

अब दिए गए समीकरण तथा समीकरण (3) को ध्यान से देखिए।

दिया गया समीकरण	*दिए गए समीकरण का सरलीकृत रूप*
$\frac{5x+2}{2x+3} = \frac{12}{7}$	$7 \times (5x + 2) = 12 \times (2x + 3)$

आपने क्या देखा? हमने जो किया वह यह है :

(i) LHS के अंश को RHS के हर से गुणा किया।	$\frac{5x+2}{2x+3} = \frac{12}{7}$
(ii) RHS के अंश को LHS के हर से गुणा किया।	$\frac{5x+2}{2x+3} = \frac{12}{7}$
(iii) (i) और (ii) में प्राप्त व्यंजकों को तुल्य किया।	$7 \times (5x + 2) = 12 \times (2x + 3)$

स्पष्ट कारणों से, इस विधि को *वज्र गुणन* (*cross multiplication*) या *तिर्यक गुणन* की विधि कहा जाता है।

अब वज्र गुणन की विधि उदाहरणों द्वारा समझाई जाएगी।

उदाहरण 3 : समीकरण $\frac{x+7}{3x+16} = \frac{4}{7}$ को हल कीजिए।

हल : वज्र गुणन द्वारा हमें प्राप्त होता है :

$$7 \times (x + 7) = 4 \times (3x + 16)$$

या $7x + 49 = 12x + 64$

या $7x - 12x = 64 - 49$

या $-5x = 15$

या $x = -3$

$$\frac{x+7}{3x+16} = \frac{4}{7}$$

जाँच : $x = -3$ पर,

$$\text{LHS} = \frac{x+7}{3x+16} = \frac{-3+7}{3\times(-3)+16} = \frac{4}{7} = \text{RHS}$$

अतः, हल सही है।

उदाहरण 4 : समीकरण $\frac{4x+1}{8x-4} = 2$ को हल कीजिए।

हल : $\frac{4x+1}{8x-4} = 2$

या $\frac{4x+1}{8x-4} = \frac{2}{1}$ (पूर्णांक 2 को परिमेय संख्या $\frac{2}{1}$ मान कर)

या $1 \times (4x+1) = 2 \times (8x-4)$ (वज्र गुणन द्वारा)

या $4x + 1 = 16x - 8$

या $1 + 8 = 16x - 4x$ (-8 का LHS और $4x$ का RHS में पक्षांतरण करने पर)

या $9 = 12x$

या $x = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

जाँच : $x = \frac{3}{4}$ पर,

$$\text{LHS} = \frac{4x+1}{8x-4} = \frac{4\times\frac{3}{4}+1}{8\times\frac{3}{4}-4} = \frac{3+1}{6-4} = \frac{4}{2} = 2 = \text{RHS}$$

अतः, हल सही है।

उदाहरण 5 : x का ऐसा धनात्मक मान ज्ञात कीजिए जो समीकरण $\frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{5}{4}$ को संतुष्ट करे।

हल : आइए, $x^2 = y$ मान लें। तब दिया गया समीकरण हो जाता है :

$$\frac{y+1}{y-1} = \frac{5}{4}$$

वज्र गुणन द्वारा,

$$4(y+1) = 5(y-1)$$

या $\quad 4y + 4 = 5y - 5$

या $\quad 5 + 4 = 5y - 4y$ (दोनों पक्षों में समान पदों को एकत्र करने पर)

$\therefore \quad y = 9$

क्योंकि $y = x^2$ है, अतः, $x^2 = 9 = 3^2 = (-3)^2$

धनात्मक मान लेने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$x = 3$$

आइए, जाँच करें कि क्या $x = 3$ दिए गए समीकरण को संतुष्ट करता है! जाँच करने पर, हम पाते हैं कि $x = 3$ दिए हुए समीकरण को संतुष्ट करता है। अतः, x का इच्छित मान 3 है।

प्रश्नावली 8.1

निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए और अपने उत्तर की जाँच कीजिए :

1. $\frac{5x-7}{3x} = 2$
2. $\frac{4x+18}{5x} = 2$
3. $\frac{4x}{2x+7} = 3$
4. $\frac{9x}{7-6x} = 15$
5. $\frac{2-z}{z+16} = \frac{3}{5}$
6. $\frac{2y+3}{y-9} = \frac{2}{7}$
7. $\frac{2y-9}{3y+4} = -1$
8. $\frac{5z-11}{3z+7} = -2$
9. $\frac{2y-4}{3y+2} = -\frac{2}{3}$

   [संकेत: $-\frac{2}{3} = \frac{-2}{3}$]
10. $\frac{5-7y}{2+4y} = -\frac{8}{7}$
11. $\frac{2k-5}{5k+2} = \frac{3}{22}$
12. $\frac{8p-5}{7p+1} = -\frac{5}{4}$

13. $\dfrac{\frac{2}{3}x+1}{x+\frac{1}{4}}=\dfrac{5}{3}$

14. $\dfrac{2x-\frac{3}{4}}{9x+\frac{4}{7}}=\dfrac{1}{4}$

15. $\dfrac{\frac{3}{4}y+7}{\frac{2}{5}y-4}=\dfrac{5}{4}$

16. $\dfrac{\frac{z}{4}-\frac{3}{5}}{\frac{4}{3}-7z}=-\dfrac{3}{20}$

17. $\dfrac{(2x+3)-(5x-7)}{6x+11}=-\dfrac{8}{3}$

18. $\dfrac{(y+1)-(2y+4)}{3-5y}=\dfrac{1}{23}$

19. $\dfrac{x^2-(x+1)(x+2)}{5x+1}=6$

20. $\dfrac{(x+2)(2x-3)-2x^2+6}{x-5}=2$

चर x या y का ऐसा धनात्मक मान ज्ञात कीजिए जो दिए गए समीकरण को संतुष्ट करे :

21. $\dfrac{x^2-9}{5+x^2}=\dfrac{-5}{9}$

22. $\dfrac{y^2+4}{3y^2+7}=\dfrac{1}{2}$

8.3 व्यावहारिक समस्याएँ हल करने में रैखिक समीकरणों का अनुप्रयोग

याद कीजिए कि बहुत सी व्यावहारिक समस्याओं में कुछ ज्ञात और कुछ अज्ञात राशियों या संख्याओं में कुछ संबंध होते हैं। पिछली कक्षा में, आपने सीखा कि कुछ स्थितियों में इन समस्याओं को रैखिक समीकरणों में कैसे रूपांतरित किया जाता है। इन समीकरणों के हल से संगत व्यावहारिक समस्याओं के हल प्राप्त हो जाते हैं। इन शाब्दिक समस्याओं के हल में महत्त्वपूर्ण चरण नीचे सूचीबद्ध किए जा रहे हैं :

1. समस्या को ध्यान से पढ़कर लिख लीजिए कि (i) क्या दिया गया है और (ii) क्या ज्ञात करना है।
2. अज्ञात राशि को किसी अक्षर संख्या x, y, z, u, v, w आदि से निर्दिष्ट कीजिए।
3. जहाँ तक संभव हो, समस्या के कथनों को एक-एक करके गणितीय कथनों में रूपांतरित कीजिए।
4. वे राशियाँ खोजिए जो बराबर हों। इन तुल्यता संबंधों के संगत समीकरण लिखिए।
5. ऊपर चरण 4 में लिखे गए समीकरणों को हल कीजिए।
6. चरण 5 में प्राप्त अज्ञात राशियों के मान समस्या के कथनों में प्रतिस्थापित कर हल की जाँच कीजिए।

आइए, अब उपरोक्त प्रक्रिया को उदाहरणों से समझाएँ।

उदाहरण 6 : 7 के तीन क्रमागत गुणजों का योगफल 777 है। ये गुणज ज्ञात कीजिए।

हल : जो राशि ज्ञात की जानी है उसके लिए हम एक चर का प्रयोग करेंगे। यहाँ हमें तीन संख्याएँ ज्ञात करनी हैं। लेकिन यदि इनमें से एक संख्या, माना कि पहली ज्ञात हो, तो अन्य दो, इस संख्या में 7 और 14 जोड़कर ज्ञात की जा सकती हैं। (यह दिया हुआ है कि संख्याएँ 7 की क्रमागत गुणज हैं।)

माना कि पहली संख्या x है। तब अन्य दो संख्याएँ $x + 7$ और $x + 14$ हुईं ।

दिया हुआ है कि इन तीन क्रमागत गुणजों का योगफल 777 है। अत:,

$$x + (x + 7) + (x + 14) = 777$$

या $\quad 3x + 21 = 777$

या $\quad 3x = 777 - 21$ [21 को पक्षांतरित करने पर]

या $\quad 3x = 756$

या $\quad x = 252$

अत:, 7 के तीन क्रमागत गुणज हुए :

252, 259 और 266

ध्यान दीजिए कि $252 = 36 \times 7$, $259 = 37 \times 7$ और $266 = 38 \times 7$

जाँच : प्राप्त तीनों गुणजों का योगफल $= 252 + 259 + 266 = 777$

अत:, हल सही है।

टिप्पणी : कभी-कभी यह अधिक सुविधाजनक होता है कि अज्ञात राशि को x न लेकर x का कोई गुणज ले लिया जाए। उदाहरणत:, ऊपर पहली संख्या को $7x$ (7 का x वाँ गुणज) मानना अधिक सुविधाजनक रहता। उस स्थिति में अगली दो संख्याएँ $7(x + 1)$ और $7(x + 2)$ होतीं। परिणामस्वरूप, समीकरण बनता :

$$7x + 7(x + 1) + 7(x + 2) = 777$$

या $\quad x + (x + 1) + (x + 2) = 111$ [दोनों पक्षों को 7 से भाग देने पर]

या $\quad 3x + 3 = 111$

या $\quad x = 36$

अतः, तीनों क्रमागत गुणज हुए :

$$36 \times 7, 37 \times 7 \text{ और } 38 \times 7$$

अर्थात् $252, 259$ और 266

उदाहरण 7 : एक फल-विक्रेता कुछ संतरे 5 रु प्रति संतरे की दर से खरीदता है। उतने ही केले वह 2 रु प्रति केले की दर से खरीदता है। वह संतरों पर 20 % और केलों पर 15 % लाभ पाता है। दिन समाप्त होने तक वह सभी फल बेच देता है। उसका कुल लाभ 390 रु है। खरीदे गए संतरों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : I. प्रश्न पढ़कर हमें ज्ञात होता है कि निम्नलिखित तथ्य दिए हुए हैं :

(1) एक संतरे का मूल्य 5 रु है।

(2) एक केले का मूल्य 2 रु है।

(3) केलों की संख्या = संतरों की संख्या।

(4) संतरों पर लाभ 20 % है।

(5) केलों पर लाभ 15 % है।

(6) समस्त फल बिक जाते हैं।

(7) कुल लाभ = 390 रु।

हमें खरीदे गए संतरों की संख्या *ज्ञात* करनी है।

II. क्योंकि हमें संतरों की संख्या ज्ञात करनी है, अतः हम मान लेते हैं कि खरीदे गए संतरों की संख्या x है।

III. अब हम एक-एक करके प्रश्न में दिए गए और चरण I में लिख लिए गए कथनों को गणितीय कथनों में रूपांतरित करने का प्रयास करेंगे। (3) और चरण II के अनुसार,

संतरों की संख्या = केलों की संख्या = x

संतरों का मूल्य = $5 \times x$ रु = $5x$ रु (A)

केलों का मूल्य = $2 \times x$ रु = $2x$ रु (B)

(4) से,

संतरों पर लाभ $= (5x \times \frac{20}{100})$ रु [(A) का प्रयोग करने पर]

$= x$ रु (C)

(5) से,

$$\text{केलों पर लाभ} = \left(2x \times \frac{15}{100}\right) \text{ रु} \qquad \text{[(B) का प्रयोग करने पर]}$$

$$= \left(\frac{3}{10}x\right) \text{ रु} \qquad \text{(D)}$$

(7) से,

390 रु = कुल लाभ = संतरों पर लाभ + केलों पर लाभ

$$= x \text{ रु} + \left(\frac{3}{10}x\right) \text{ रु} \qquad \text{[(C) और (D) का प्रयोग करने पर]}$$

$$= \left(x + \frac{3}{10}x\right) \text{ रु}$$

$$= \left(\frac{13}{10}x\right) \text{ रु}$$

यहाँ से, $$390 = \frac{13}{10}x \qquad \text{(E)}$$

इस रैखिक समीकरण को हल करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{10}{13} \times 390 = \frac{10}{13} \times \frac{13}{10}x$$

या $$300 = x$$

अतः, खरीदे गए संतरों की संख्या 300 है।

IV. अब हल की जाँच की जाएगी। जाँच इस तथ्य से आरंभ कर सकते हैं कि $x = 300$ समीकरण (E) को संतुष्ट करता है। किंतु इससे यही ज्ञात हो पाएगा कि हमने समीकरण (E) को ठीक हल किया है। इससे यह ज्ञात नहीं होगा कि वास्तव में 300 संतरे खरीदे गए थे। यह जाँचने के लिए, *हमें हल का सत्यापन दिए गए प्रश्न से मिलाकर करना होगा।* आइए, ऐसा करें।

यदि 300 संतरें 5 रु की दर से खरीदकर 20 % लाभ पर बेचे जाएँ, तो संतरों पर लाभ होगा :

$$\left(300 \times 5 \times \frac{20}{100}\right) \text{ रु} = 300 \text{ रु} \qquad \text{(F)}$$

यदि 300 केले (उतने ही जितने कि संतरे) 2 रु की दर से खरीदकर 15 % लाभ पर बेचे जाएँ, तो केलों पर लाभ होगा :

$$\left(300 \times 2 \times \frac{15}{100}\right) \text{ रु} = 90 \text{ रु} \qquad \text{(G)}$$

(F) और (G) से, विक्रेता का कुल लाभ हुआ :

300 रु + 90 रु = 390 रु

अतः, हल सही है।

उदाहरण 8 : एक समकोण त्रिभुज की भुजाएँ (कर्ण के अतिरिक्त) 3:4 के अनुपात में हैं। इसके कर्ण पर एक आयत बनाया गया है जिसकी बड़ी भुजा स्वयं यह कर्ण है (आकृति 8.1)। इस आयत की चौड़ाई इसकी लंबाई का $\frac{4}{5}$वाँ भाग है। यदि आयत का परिमाप 180 cm हो, तो समकोण त्रिभुज की सबसे छोटी भुजा ज्ञात कीजिए।

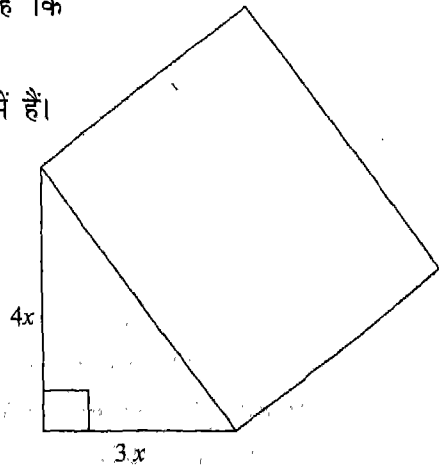
हल : I. प्रश्न को ध्यान से पढ़ने पर ज्ञात होता है कि निम्नलिखित तथ्य दिए गए हैं :

(1) समकोण त्रिभुज की भुजाएँ 3:4 के अनुपात में हैं।

(2) आयत की लंबाई = समकोण त्रिभुज का कर्ण

(3) आयत की चौड़ाई = $\frac{4}{5}$ × (आयत की लंबाई)

(4) आयत का परिमाप = 180 cm

हमें समकोण त्रिभुज की सबसे छोटी भुजा *ज्ञात* करनी है।

आकृति : 8.1

II. क्योंकि त्रिभुज की एक भुजा ज्ञात करनी है, अत: ऊपर के तथ्य (1) को ध्यान में रखते हुए, यह सुविधाजनक रहेगा कि सबसे छोटी भुजा को (cm में) $3x$ मान लिया जाए। इस स्थिति में, त्रिभुज की दूसरी भुजा (cm में) $4x$ होगी।

III. अब हम प्रश्न में दी गई सूचनाओं [ऊपर के तथ्य (1) से (4)] को गणितीय कथनों में रूपांतरित करने का प्रयास करेंगे। चरण II में, (1) को तो पहले ही $3x$ और $4x$ के रूप में परिवर्तित किया जा चुका है। अब (2) को लीजिए। इससे हमें ज्ञात होता है कि आयत की लंबाई समकोण त्रिभुज के कर्ण के समान है। आइए, कर्ण का मान ज्ञात करें। पाइथागोरस प्रमेय से,

कर्ण (cm में) = $\sqrt{\text{भुजाओं के वर्गों का योग}}$

$$= \sqrt{(3x)^2 + (4x)^2} = \sqrt{25x^2} = 5x$$

अत:, आयत की लंबाई (cm में) $= 5x$ (A)

(3) से, हम देखते हैं कि

आयत की चौड़ाई (cm में) $= \frac{4}{5} \times 5x = 4x$ (B)

आइए, अब (4) को गणितीय कथन में रूपांतरित करें। याद कीजिए कि

आयत का परिमाप = 2 × (लंबाई + चौड़ाई)

अत:, (4) से प्राप्त होता है :

$2 \times (5x + 4x) = 180$ (C)

IV. अब हम समीकरण (C) को हल करेंगे जिसे निम्न प्रकार लिखा जा सकता है :

$$18\,x = 180$$

$$\therefore \quad x = 10$$

अत:, त्रिभुज की सबसे छोटी भुजा (cm में) $= 3x = 3 \times 10 = 30$

जाँच : अब हम दिए गए प्रश्न के साथ हल की जाँच करेंगे। त्रिभुज की सबसे छोटी भुजा 30 cm है। क्योंकि भुजाएँ 3 : 4 के अनुपात में हैं, अत:, दूसरी भुजा 40 cm हुई। अर्थात्

त्रिभुज का कर्ण $= \sqrt{30^2 + 40^2}$ cm $= \sqrt{2500}$ cm $= 50$ cm

इस प्रकार, आयत की लंबाई = 50 cm और इसकी चौड़ाई $\frac{4}{5} \times 50$ cm = 40 cm हुई। अब आयत का परिमाप 2 × (50 + 40) cm, अर्थात् 180 cm हुआ।

अत:, हल सही है।

अब हम निश्चित रूप से कह सकते हैं कि त्रिभुज की सबसे छोटी भुजा 30 cm है।

उदाहरण 9 : दो धनात्मक पूर्णांकों का अंतर 50 है। इन पूर्णांकों में 1:3 का अनुपात है। ये पूर्णांक ज्ञात कीजिए।

हल : I. हमें दो पूर्णांकों में दो संबंध दिए गए हैं। हमें दोनों पूर्णांकों के मान ज्ञात करने हैं। चलिए, जिन दो पूर्णांकों के मान ज्ञात करने हैं उनमें से छोटे को चर x से व्यक्त करें।

II. प्रश्न के पहले कथन से ज्ञात होता है कि दोनों पूर्णांकों का अंतर 50 है। अत: बड़ा पूर्णांक $x + 50$ है। इस प्रकार, ये दो पूर्णांक x और $x + 50$ हैं।

III. अब प्रश्न का अगला कथन पढ़िए। इससे ज्ञात होता है कि इन पूर्णांकों का अनुपात 1 : 3 है। इस संबंध को गणितीय कथन में परिवर्तित करने पर,

$$\frac{1}{3} = \frac{x}{x+50} \qquad (1)$$

चूँकि 1, 3 से छोटा होता है, हमने छोटे पूर्णांक x को RHS के अंश में लिखा।

IV. प्रश्न में और कोई सूचना नहीं दी गई है। अत:, हम ऊपर के समीकरण (1) को हल करते हैं। वज्र गुणन द्वारा,

$$1 \times (x + 50) = 3 \times x$$

या $$x + 50 = 3x$$

या $$50 = 2x$$

या $$x = 25$$

V. पूर्णांकों को x और $x + 50$ से व्यक्त किया गया था। हमने पाया कि x का मान 25 है। अत:, ये पूर्णांक 25 और 25 + 50, अर्थात् 25 और 75 हैं। अत:, इच्छित पूर्णांक 25 और 75 हैं।

VI. आइए, अब हल की जाँच करें। प्रश्न का पहला कथन यह बताता है कि पूर्णांकों में 50 का अंतर है। हम देखते हैं कि 75 − 25 = 50 है। यहाँ तक तो हल सही है। प्रश्न का दूसरा कथन है कि इन दोनों पूर्णांकों का अनुपात 1 : 3 है। अब 25 : 75 वही अनुपात है जो 1 : 3 है। अत:, हल सही है।

टिप्पणी : चरण V के अंत में यह जाँचने में कि $x = 25$ समीकरण (1) को संतुष्ट करता है या नहीं, कोई हानि नहीं थी। किंतु यह जाँच इस बात के लिए पर्याप्त न होती कि दी गई समस्या का हल सही है। अत:, यह आवश्यक है कि हम चरण VI के अनुसार हल को दी हुई समस्या के साथ मिलाकर उसकी जाँच करें।

वैकल्पिक हल : चूँकि संख्याएँ 1:3 के अनुपात में हैं, अत: हम संख्याओं को x और $3x$ ले सकते हैं। क्योंकि संख्याओं में अंतर 50 है, अत:

$3x - x = 50$ [ध्यान दीजिए कि $3x$ बड़ी संख्या है।]

या $2x = 50$

या $x = 25$

अत:, अभीष्ट संख्याएँ 25 और 75 हैं।

उदाहरण 10 : दो अंकों वाली एक संख्या के अंकों का योग 7 है। अंकों का परस्पर क्रम बदलने पर प्राप्त संख्या दी गई संख्या से 27 अधिक है। वह संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : यह दिया गया है कि इच्छित *संख्या में दो अंक* हैं। इसलिए संख्या ज्ञात करने के लिए, हमें उसके इकाई और दहाई के अंक निकालने होंगे।

माना कि इकाई का अंक x है। क्योंकि अंकों का योग 7 दिया गया है, अत: दहाई का अंक $(7 - x)$ हुआ। इस प्रकार, प्रसारित रूप में यह संख्या है :

$(7 - x) \times 10 + x$ अर्थात् $70 - 9x$ (1)

[याद कीजिए कि प्रसारित रूप में, $25 = 2 \times 10 + 5, 81 = 8 \times 10 + 1, 36 = 3 \times 10 + 6$ आदि।]

आइए, अब दी गई संख्या के अंकों का क्रम बदल दें। तब इकाई का अंक $(7 - x)$ और दहाई का अंक x हो जाता है। प्रसारित रूप में, नई संख्या है:

$x \times 10 + (7 - x)$, अर्थात् $9x + 7$ (2)

दिया गया है कि नई संख्या पुरानी संख्या से 27 अधिक है। अत:, (1) और (2) से हमें प्राप्त होता है :

$(9x + 7) - (70 - 9x) = 27$

या $18x - 63 = 27$

या $18x = 90$ (-63 को पक्षांतरित करने पर)

या $x = 5$ (18 से भाग देकर)

इस प्रकार, इकाई का अंक $= x = 5$,

दहाई का अंक $= 7 - x = 7 - 5 = 2$

अत:, अभीष्ट संख्या 25 है।

जाँच : अंकों का परस्पर क्रम बदलने पर हमें 52 प्राप्त होता है।

अब, $52 - 25 = 27$

अत:, हल सही है।

उदाहरण 11 : नदी के बहाव की दिशा में जाती हुई एक मोटरबोट दो तटीय नगरों के बीच की दूरी पाँच घंटे में तय करती है। बहाव के विपरीत मोटरबोट इसी दूरी को छ: घंटे में तय करती है। यदि जलधारा की चाल 2 km/h हो, तो स्थिर जल में बोट की चाल ज्ञात कीजिए।

हल : क्योंकि हमें स्थिर जल में बोट की चाल ज्ञात करनी है, इसलिए हम मान लेते हैं कि यह चाल x km/h है। इसका अर्थ यह हुआ कि बहाव के साथ-साथ जाते हुए बोट की चाल $(x + 2)$ km/h होगी, क्योंकि x km/h की इसकी अपनी चाल के अतिरिक्त जल भी इसे 2 km/h की दर से आगे धकेल रहा है। बहाव के विपरीत जाते हुए बोट को जल की धारा के विपरीत भी शक्ति लगानी पड़ती है। अत: बहाव के विपरीत इसकी चाल $(x - 2)$ km/h होगी।

यह दिया गया है कि बहाव के साथ-साथ जाते हुए बोट दो तटीय नगरों, माना A और B, के बीच की दूरी पाँच घंटे में तय करती है। अब,

बहाव के साथ बोट की चाल $= (x + 2)$ km/h

एक घंटे में तय की गई दूरी $= (x + 2)$ km

$\therefore$ पाँच घंटे में तय की गई दूरी $= 5 \times (x + 2)$ km

अत:, A और B के बीच की दूरी $5(x + 2)$ km है। (1)

बहाव के विपरीत बोट की चाल $= (x - 2)$ km/h

एक घंटे में तय की गई दूरी $= (x - 2)$ km

$\therefore$ छ: घंटे में तय की गई दूरी $= 6 \times (x - 2)$ km

अत:, A और B के बीच की दूरी $6(x - 2)$ km है। (2)

क्योंकि A और B के बीच तो एक नियत दूरी है, अत: (1) और (2) की तुलना कर, हमें प्राप्त होता है : $5(x + 2) = 6(x - 2)$

इस रैखिक समीकरण को हल करने पर हमें $x = 22$ प्राप्त होता है। अत:, मोटरबोट की अभीष्ट चाल 22 km/h है।

प्रश्नावली 8.2

1. दो धनात्मक पूर्णांकों का अंतर 36 है। एक पूर्णांक को दूसरे से भाग देने पर भागफल 4 आता है। दोनों पूर्णांक ज्ञात कीजिए।
2. दो धनात्मक पूर्णांकों का योग 98 है। इन पूर्णांकों में 3:4 का अनुपात है। ये पूर्णांक ज्ञात कीजिए।
3. एक परिमेय संख्या का हर उसके अंश से 8 अधिक है। अंश में 17 जोड़ने और हर में से 1 घटाने पर, संख्या $\frac{3}{2}$ प्राप्त होती है। वह परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए।
4. एक संख्या दूसरी संख्या की तीन गुनी है। दोनों संख्याओं में पंद्रह-पंद्रह जोड़ने पर प्राप्त संख्याओं में से एक, दूसरी की दुगुनी हो जाती है। वे संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
5. 5 के दो क्रमागत गुणजों का योग 55 है। इन दोनों गुणजों को ज्ञात कीजिए।
6. 6 के तीन क्रमागत गुणजों का योग 666 है। ये गुणज ज्ञात कीजिए।
7. 9 के तीन क्रमागत गुणजों का योग 999 है। ये गुणज ज्ञात कीजिए।
8. रूबी और रेशमा की आयु में 5 : 7 का अनुपात है। चार वर्ष पश्चात्, उनकी आयु का अनुपात 3 : 4 हो जाएगा। उनकी आयु ज्ञात कीजिए।
9. पाँच वर्ष पहले लकी की आयु लवली की आयु की तीन गुनी थी। दस वर्ष पश्चात्, लकी की आयु लवली की आयु की दुगुनी हो जाएगी। उनकी वर्तमान आयु क्या हैं?

   [*संकेत :* पहले यह ज्ञात कीजिए कि पाँच वर्ष पूर्व उनकी आयु क्या थीं।]
10. एक आयत का परिमाप 240 cm है। लंबाई को 10 % घटाने और चौड़ाई को 20 % बढ़ाने पर भी परिमाप यही रहता है। आयत की लंबाई एवं चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

    [*संकेत :* यदि l और b क्रमश: लंबाई और चौड़ाई को व्यक्त करते हों, तो $b = 120 - l$ है।]
11. दो अंकों वाली एक संख्या के अंकों का योग 9 है। अंकों का परस्पर क्रम बदलने पर प्राप्त संख्या दी गई संख्या से 27 अधिक है। दी गई संख्या ज्ञात कीजिए।
12. दो अंकों की एक संख्या के अंकों का योग 12 है। दी गई संख्या, अंकों का परस्पर क्रम बदलने पर प्राप्त संख्या से 36 अधिक है। दी गई संख्या ज्ञात कीजिए।

13. किसी दिए गए त्रिभुज की प्रत्येक भुजा में 10 cm की वृद्धि की जाती है। यदि नए त्रिभुज और दिए गए त्रिभुज के परिमापों में 5:4 का अनुपात हो, तो दिए हुए त्रिभुज का परिमाप ज्ञात कीजिए।

    [*संकेत :* यदि भुजाएँ a, b, c हो, तो परिमाप $a + b + c$ को x मान लीजिए।]

14. सेवानिवृत्त होने पर, कंचन को अपने नियोक्ता (employer) से कुछ धनराशि प्राप्त होती है। वह इस राशि की आधी राशि में 10000 रु और मिलाकर अपनी पुत्री को देती है। वह प्राप्त राशि की तिहाई राशि में 3000 रु और मिलाकर अपने पुत्र को भी देती है। यदि पुत्री को पुत्र से दुगुनी राशि प्राप्त हुई हो, तो कंचन को सेवानिवृत्ति पर अपने नियोक्ता से मिली राशि ज्ञात कीजिए।

15. नदी के बहाव की दिशा में जाती हुई कोई मोटरबोट नदी में एक विशेष दूरी पाँच घंटे में तय करती है। बहाव के विपरीत बोट इसी दूरी को साढ़े पाँच घंटे में तय करती है। जलधारा की चाल 1.5 km/h है। स्थिर जल में बोट की चाल ज्ञात कीजिए।

16. नदी में बहाव के साथ-साथ जाता हुआ कोई स्टीमर दो नगरों के बीच की दूरी 20 घंटे में तय करता है। बहाव के विपरीत दिशा में वापिस आते हुए स्टीमर इसी दूरी को 25 घंटे में तय करता है। जलधारा की चाल 4 km/h है। दोनों नगरों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

    [*संकेत :* पहले स्थिर जल में स्टीमर की चाल निकालिए।]

17. एक रेस-बोट 66 km की दूरी बहाव के साथ-साथ जाती हुई 110 मिनट में तय करती है। बहाव के विपरीत जाते हुए इसी दूरी को तय करने में बोट 120 मिनट लेती है। स्थिर जल में बोट की चाल 34.5 km/h है। जलधारा की चाल ज्ञात कीजिए।

याद रखने योग्य बातें

1. यदि a, b, c, d और k संख्याएँ हों, तो $\frac{ax+b}{cx+d} = k$ जैसे समीकरणों को हल करने के लिए, हम इन्हें रैखिक समीकरणों के रूप में बदलते हैं।
2. $\frac{ax+b}{cx+d} = k$ जैसे समीकरणों को रैखिक समीकरणों में बदलने के लिए वज्र गुणन की विधि उपयोगी रहती है।
3. किसी शाब्दिक समस्या को हल करने के लिए, अज्ञात राशि को किसी चर से व्यक्त कीजिए और प्रश्न में दिए गए कथनों को क्रमवार गणितीय कथनों में बदलिए। प्रासंगिक समता संबंध बनाकर संगत समीकरणों को हल कीजिए।

—— *अतीत के झरोखे से* ——

बीजगणित के क्षेत्र में *आर्यभट, ब्रह्मगुप्त* और *भास्कर* जैसे भारतीय गणितज्ञों के योगदान से आप पहले ही परिचित हैं। परंतु जिस विषय को आज हम बीजगणित के नाम से जानते हैं उसके बीज तो सभ्यता के आदिम युग में ही बोए जा चुके थे। इसे हम बीजगणित के ज्ञान का प्रथम चक्र कह सकते हैं। यहाँ ऐसी संख्या-पहेलियाँ दृष्टिगोचर होती हैं जिन्हें बीजगणितीय पुट से हल किया जा सकता है। *अहम्स* (*Ahmes*, 1550 ईसा पूर्व) एक पांडुलिपिक (scribe) थे जिन्होंने अपने काल के गणित-ज्ञान को *पेपिरस* (*papyrus*) पर लिखा। उनके पेपिरस पर लिखा एक प्रश्न यह है: *राशि, यह पूरी, इसका सप्तांश, यह 19 है।* (*Mass, it whole, its seventh, it makes 19,* हमारे संकेतन में यह हुआ : $x + \frac{x}{7} = 19$)

दूसरे चक्र में, बीजगणित ज्यामितीय रूप में यूनान में दृष्टिगोचर होता है। यूनानी ज्यामिति में तो निपुण थे पर जाने कैसे, इनका बीजगणित का ज्ञान शून्य था। आधुनिक बीजगणितीय संक्रियाओं को वे लाघवपूर्ण ज्यामितीय विधियों से करते थे। उदाहरणतः, *यूक्लिड* (*Euclid*) की पुस्तक II में, अनेक बीजीय सर्वसमिकाओं के ज्यामितीय प्रसंस्करण मिलते हैं। ये सभी सर्वसमिकाएँ किसी-न-किसी ज्यामितीय आकृति को उपयुक्त टुकड़ों में काटकर सिद्ध की गई थीं। उदाहरण के लिए, प्रारंभिक पाइथागोरियों (Pythagoreans) द्वारा सिद्ध की गई सर्वसमिका $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, यूक्लिड ने इस प्रकार व्यक्त की :

यदि किसी सीधी रेखा को दो भागों में बाँटा जाए, तो संपूर्ण रेखा पर बना वर्ग तुल्य होता है, उसके दोनों भागों पर बने वर्ग और दोनों भागों से बने आयत के दुगुने के।

तीसरे चक्र में, बीजगणित मानवीय कार्यकलापों से संबद्ध ललित, पूर्वदेशीय समस्याओं (जिनके कुछ उदाहरण कक्षा VII में दिए गए थे) और वास्तविक जीवन की समस्याओं के रूप में उभरता है। नीचे दी गई समस्याओं में से प्रथम किसी यूनानी संग्रह से ली गई है और दूसरी चीन देश से ली गई है।

I. *मूर्ति* A : जिस आधार पर मैं स्थित हूँ उसका और मेरा भार मिलाकर, कुल कितना भार है?

मूर्ति B : मेरे आधार का और मेरा भार मिलाकर जितने टैलैंट (*talent*) हैं, उतना।

मूर्ति A : मुझ अकेले का भार तुम्हारे आधार के भार का दुगुना है।

मूर्ति B : मुझ अकेले क़ा भार तुम्हारे आधार के भार का तीन गुना है।

(आप इस समस्या को सरलता से हल कर सकते हैं; कुल भार को w और मूर्ति B के आधार के भार को x मानकर चलिए।)

II. यदि एक मुर्गे का मूल्य 5 *सपेक* (*Sapeks*), एक मुर्गी का मूल्य 3 *सपेक* और तीन चूज़ों का मूल्य 1 *सपेक* हो, तो कितने-कितने मुर्गे, मुर्गियों और चूज़ों, कुल मिलाकर 100 का मूल्य 100 *सपेक* होगा?

(आप प्रयत्न और भूल विधि से हल ज्ञात कर सकते हैं; याद रखिए कि *सपेक* धन का एक मात्रक है।)

उच्च कक्षाओं में आप अन्य अनेक प्रकार के बीजगणितों के विषय में अध्ययन करेंगे।

अध्याय

समांतर रेखाएँ

9.1 भूमिका

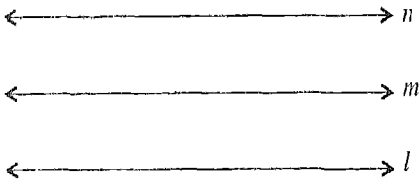
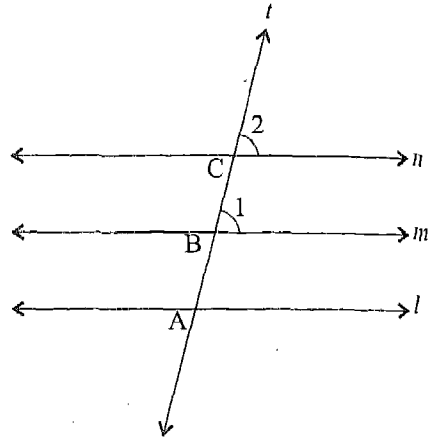
पिछली कक्षाओं में, आप समांतर रेखाओं, तिर्यक रेखाओं तथा उनके कुछ गुणों के बारे में अध्ययन कर चुके हैं। आपको निम्न के बारे में याद होगा :

1. एक तल में वे रेखाएँ जो प्रतिच्छेद नहीं करती *समांतर रेखाएँ* (*Parallel lines*) कहलाती हैं।
2. वह रेखा जो दो या दो से अधिक दी हुई रेखाओं को *भिन्न* (*distinct*) बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करती है उन दी हुई रेखाओं पर एक *तिर्यक रेखा* (*transversal*) कहलाती है।
3. दो समांतर रेखाओं के बीच की दूरी सभी स्थानों पर समान रहती है तथा यह इन दोनों समांतर रेखाओं के बीच की लांबिक (लंबवत्) दूरी के बराबर होती है।
4. यदि दो समांतर रेखाओं को एक तिर्यक रेखा प्रतिच्छेद करे, तो
   (i) संगत कोणों के प्रत्येक युग्म के कोण बराबर होते हैं।
   (ii) एकांतर अंत: कोणों के प्रत्येक युग्म के कोण बराबर होते हैं।
   (iii) तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंत: कोण संपूरक होते हैं।
5. यदि दो रेखाएँ एक तिर्यक रेखा द्वारा प्रतिच्छेदित हों, तो वे समांतर होती हैं, जबकि निम्न में से कोई भी एक कथन सत्य हो :
   (i) संगत कोणों के किसी भी युग्म के कोण बराबर हैं।
   (ii) एकांतर अंत: कोणों के किसी भी युग्म के कोण बराबर हैं।
   (iii) तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंत: कोणों के प्रत्येक युग्म के कोण संपूरक हैं।

इस अध्याय में, हम समांतर रेखाओं से संबंधित कुछ और गुणों का अध्ययन करेंगे तथा इस ज्ञान का (i) एक दिए हुए रेखाखंड को दिए हुए समान (बराबर) भागों में विभाजित करने एवं

(ii) एक दिए हुए रेखाखंड को एक दिए हुए अनुपात में विभाजित करने में प्रयोग करेंगे।

9.2 एक ही रेखा के समांतर रेखाएँ

मान लीजिए किसी तल में हमें एक निश्चित रेखा l दी हुई है। आइए इसी तल में, ऐसी दो रेखाओं m एवं n पर विचार करें जिनमें से प्रत्येक रेखा l के समांतर है (आकृति 9.1)। इस प्रकार $m \parallel l$ और $n \parallel l$ है। इन दोनों रेखाओं m और n के बारे में आप क्या कह सकते हैं? क्या ये दोनों रेखाएँ समांतर हैं? आइए जाँच करें।

आकृति 9.1

आकृति 9.2

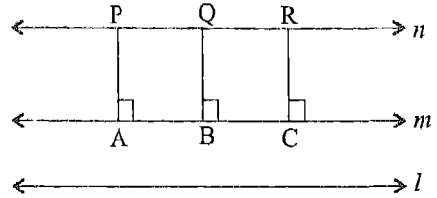
क्रियाकलाप 1 : एक कागज पर रेखा l खींचिए। पटरी एवं सेट-स्क्वेयर की सहायता से दो रेखाएँ m और n ऐसी खींचिए कि इनमें से प्रत्येक रेखा l के समांतर हो। अब एक तिर्यक रेखा t खींचिए जो रेखाओं l, m और n को क्रमशः A, B और C पर प्रतिच्छेद करे तथा क्रमशः बिंदुओं B और C पर संगत कोण 1 और 2 बनाए (आकृति 9.2)।

चाँदे की सहायता से $\angle 1$ और $\angle 2$ को मापिए तथा अंतर $\angle 1 - \angle 2$ ज्ञात कीजिए। इसी प्रकार की समांतर रेखाएँ लेकर उपर्युक्त क्रियाकलाप को दो और आकृतियाँ बनाकर दोहराइए। सुविधा की दृष्टि से, प्रत्येक स्थिति में आकृति का नामांकन एक ही प्रकार से करें। इन आकृतियों को 1, 2 और 3 से क्रमांकित कीजिए। प्रत्येक आकृति के लिए $\angle 1$, $\angle 2$ एवं अंतर $\angle 1 - \angle 2$ ज्ञात कीजिए तथा अपने प्रेक्षणों को एक सारणी के रूप में लिखिए, जैसा कि आगे दर्शाया गया है :

आकृति	$\angle 1$	$\angle 2$	$\angle 1 - \angle 2$
1			
2			
3			

आप क्या देखते हैं? प्रत्येक स्थिति में, आप देखेंगे कि अंतर $\angle 1 - \angle 2$ या तो शून्य है या इतना कम है कि इसे छोड़ा जा सकता है। शून्येतर अंतर मापन में की गई किसी त्रुटि के कारण हो सकता है। इस प्रकार, प्रत्येक स्थिति में $\angle 1 = \angle 2$ है।

चूँकि $\angle 1$ और $\angle 2$ संगत कोण हैं, इसलिए प्रत्येक स्थिति में $m \parallel n$ है।

क्रियाकलाप 2 : क्रियाकलाप 1 की ही तरह, एक कागज पर कोई रेखा l खींचिए और फिर पटरी एवं सेट स्क्वेयर की सहायता से l के समांतर दो रेखाएँ m और n खींचिए। अब रेखा n पर तीन बिंदु P, Q एवं R लीजिए तथा इन बिंदुओं से रेखा m पर क्रमशः लंब PA, QB एवं RC खींचिए ताकि A, B और C रेखा m पर स्थित हों (आकृति 9.3)।

आकृति 9.3

इसी प्रकार की समांतर रेखाएँ एवं लंब रेखाएँ लेते हुए, दो अन्य आकृतियाँ खींचकर उपर्युक्त क्रियाकलाप को दोहराएँ। सुविधा की दृष्टि से, प्रत्येक स्थिति के लिए, आकृति का नामांकन एक ही प्रकार से कीजिए तथा आकृतियों को संख्याओं 1, 2 और 3 से क्रमांकित कीजिए।

अब प्रत्येक स्थिति में, PA, QB एवं RC को मापिए अथा अंतरों PA–QB, QB–RC एवं RC–PA को ज्ञात कीजिए। अपने प्रेक्षणों को एक सारणी के रूप में लिखिए, जैसा कि नीचे दर्शाया गया है :

आकृति	PA	QB	RC	PA–QB	QB–RC	RC–PA
1						
2						
3						

आप क्या देखते हैं? आप देखेंगे कि प्रत्येक स्थिति में, लांबिक दूरियों के अंतर PA–QB, QB – RC एवं RC – PA या तो शून्य हैं या इतने कम हैं कि इन्हें छोड़ा जा सकता है। यहाँ

भी शून्येतर अंतर त्रुटिपूर्ण मापनों के कारण प्राप्त होंगे।

इस प्रकार, प्रत्येक स्थिति में, PA = QB = RC है। दूसरे शब्दों में, दोनों रेखाओं m और n के बीच की लांबिक दूरियाँ प्रत्येक स्थान पर बराबर हैं। इस प्रकार, $m \parallel n$ है।

उपर्युक्त दोनों क्रियाकलापों से हमें निम्नलिखित गुण दृष्टिगत होता है:

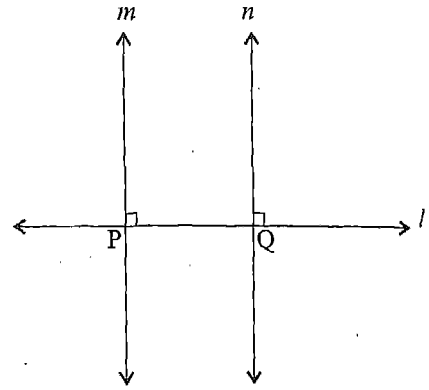
दो रेखाएँ जो एक ही रेखा के समांतर हों परस्पर समांतर होती हैं।

इस स्थिति में, हम यह भी कहते हैं कि *तीनो रेखाएँ परस्पर समांतर हैं।*

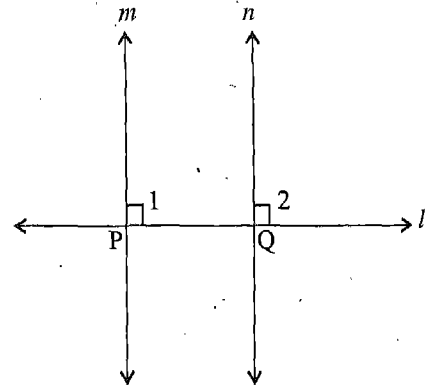
टिप्पणी : हम उपर्युक्त गुण को निम्न प्रकार भी व्यक्त कर सकते हैं :

दो रेखाएँ जो एक ही रेखा के समांतर हैं परस्पर प्रतिच्छेद नहीं कर सकतीं। दूसरे शब्दों में, *दो प्रतिच्छेदी रेखाएँ एक ही रेखा के समांतर नहीं हो सकतीं।*

9.3 एक ही रेखा पर लंब रेखाएँ

मान लीजिए किसी तल में हमें एक निश्चित रेखा l दी हुई है। आइए इसी तल में, ऐसी दो रेखाओं m और n पर विचार करें जो रेखा l पर क्रमश: P एवं Q बिंदुओं पर लंब हैं (आकृति 9.4)। आप इन दोनों रेखाओं m और n के बारे में क्या कह सकते हैं? क्या ये दोनों रेखाएँ परस्पर समांतर हैं या नहीं? आइए इसकी जाँच करें।

आकृति 9.4

आकृति 9.5

क्रियाकलाप 3 : एक कागज पर कोई रेखा l खींचिए तथा उस पर कोई दो बिंदु P और Q लीजिए। पटरी एवं सेट स्क्वेयर की सहायता से, l पर दो लंब रेखाएँ खींचिए जो क्रमश: P और Q पर संगत कोण 1 और 2 बनाएँ (आकृति 9.5)। हम देखते हैं कि $\angle 1 = 90° = \angle 2$ है। हम यह भी देखते हैं कि $\angle 1$ और $\angle 2$ संगत कोण हैं। क्योंकि ये दोनों संगत कोण बराबर हैं, इसलिए हमें $m \parallel n$ प्राप्त होता है।

इस क्रियाकलाप से हमें निम्नलिखित गुण दृष्टिगत होता है :

दो रेखाएँ जो एक ही रेखा पर लंब होती हैं परस्पर समांतर होती हैं।

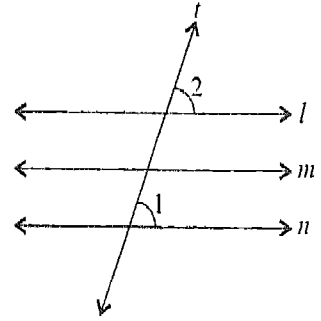
हम इस गुण की रेखा m पर तीन बिंदु A, B एवं C लेकर, उनसे n पर क्रमश: AM, BN एवं CR लंब खींचकर और फिर AM, BN एवं CR को मापकर भी जाँच कर सकते हैं, जैसा कि उपर्युक्त क्रियाकलाप 2 में की थी। हम देखेंगे कि AM = BN = CR है और इसलिए $m \parallel n$ है।

आइए इन गुणों को स्पष्ट करने के लिए कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 1 : आकृति 9.6 में, $l \parallel m$ तथा $m \parallel n$ है। यदि $\angle 1 = 70°$ है, तो $\angle 2$ ज्ञात कीजिए।

हल : $l \parallel m$ तथा $m \parallel n$ (दिया है)

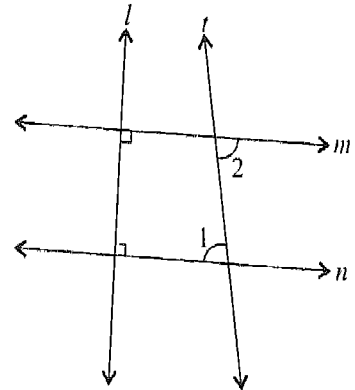
अत:, $l \parallel n$ (एक ही रेखा के समांतर रेखाएँ)

इसलिए, $\angle 2 = \angle 1 = 70°$ (संगत कोण)

आकृति 9.6

उदाहरण 2 : आकृति 9.7 में, $m \perp l$ और $n \perp l$ है तथा तिर्यक रेखा t क्रमश: n और m के साथ $\angle 1$ और $\angle 2$ बनाती है। यदि $\angle 1 = 80°$ है, तो $\angle 2$ ज्ञात कीजिए।

हल : $m \perp l$ और $n \perp l$ (दिया है)

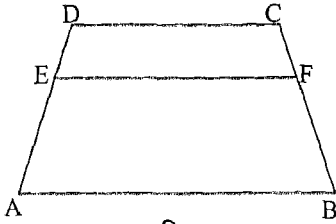
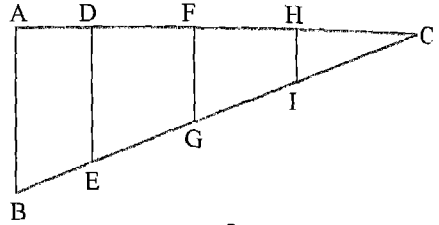
अत:, $m \parallel n$ (एक ही रेखा पर लंब रेखाएँ)

इसलिए, $\angle 2 = \angle 1 = 80°$ (एकांतर अंत:कोण)

आकृति 9.7

प्रश्नावली 9.1

1. आकृति 9.8 में, AB ∥ DC एवं EF ∥ AB है।

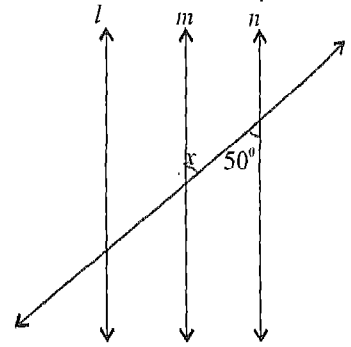
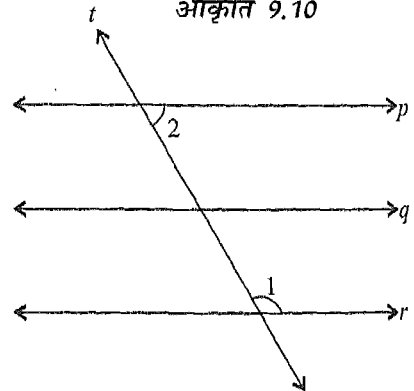
(i) क्या EF ∥ DC भी है? क्यों?

(ii) इस आकृति में समांतर रेखाखंडों के कितने युग्म हैं? प्रत्येक का नाम लिखए।

आकृति 9.8

आकृति 9.9

2. आकृति 9.9 में, रेखाखंडों DE, FG और HI में से प्रत्येक Δ ABC की भुजा AB के समांतर है। इस आकृति में समांतर रेखाखंडों के कितने युग्म हैं? प्रत्येक का नाम लिखिए।

3. आकृति 9.10 में, $l \parallel m$ एवं $l \parallel n$ है।

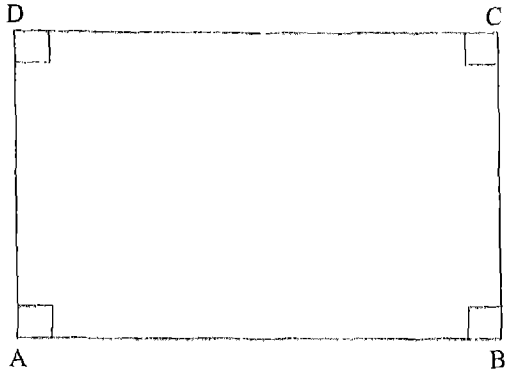
(i) क्या $m \parallel n$ है? क्यों ?

(ii) x का मान ज्ञात कीजिए।

4. आकृति 9.11 में, $p \parallel q$ एवं $q \parallel r$ है।
यदि $\angle 1 = 120°$ है, तो $\angle 2$ ज्ञात कीजिए।

आकृति 9.10

आकृति 9.11

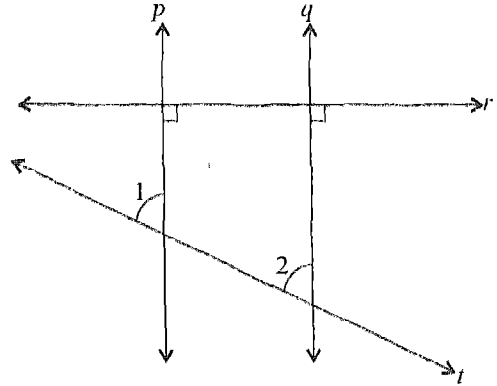
5. चतुर्भुज ABCD का प्रत्येक कोण समकोण है (आकृति 9.12)।

(i) क्या AD || BC है? क्यों?

(ii) क्या AB || DC है? क्यों?

आकृति 9.12

6. आकृति 9.13 में, $r \perp p$ एवं $r \perp q$ है।

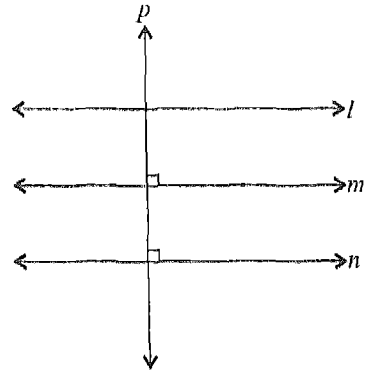
(i) क्या $p \parallel q$ है? क्यों?

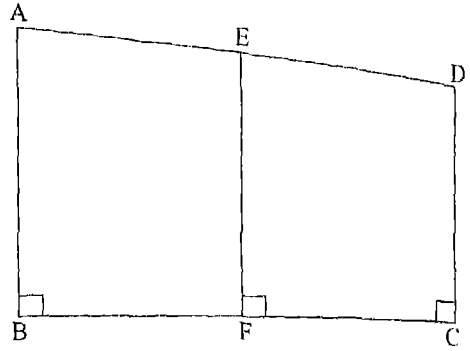
(ii) यदि $\angle 1 = 65°$ है, तो $\angle 2$ ज्ञात कीजिए।

आकृति 9.13

7. आकृति 9.14 में, $l \parallel m$, $p \perp m$ एवं $p \perp n$ है।

(i) क्या $m \parallel n$ है? क्यों?

(ii) क्या $l \parallel n$ है? क्यों?

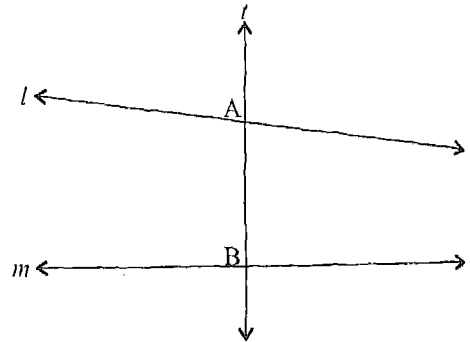
(iii) क्या $p \perp l$ है? क्यों?

आकृति 9.14

8. आकृति 9.15 में, AB, EF एवं DC में से प्रत्येक BC पर लंब है। इस आकृति में समांतर रेखाओं के कितने युग्म हैं? प्रत्येक का नाम लिखिए।

आकृति 9.15

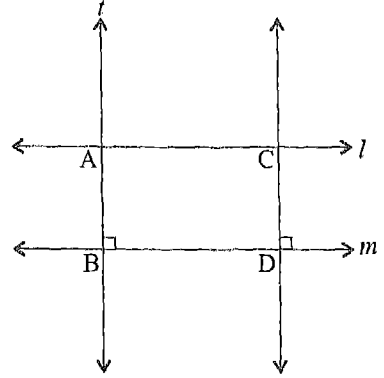
9. निम्नलिखित कथनों के लिए सत्य (T) अथवा असत्य (F) लिखिए :
   (i) एक ही रेखा के समांतर दो रेखाएँ परस्पर समांतर होती हैं।
   (ii) एक ही रेखा के समांतर दो रेखाएँ परस्पर लंब होती हैं।
   (iii) एक ही रेखा पर लंब दो रेखाएँ परस्पर समांतर होती हैं।
   (iv) एक ही रेखा पर लंब दो रेखाएँ परस्पर लंब होती हैं।
   (v) एक ही रेखा के समांतर दो रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेद करती हैं।
   (vi) एक ही रेखा पर लंब दो रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेद करती हैं।

9.4 अंत:खंड

आप आकृति 9.16 से अपनी पिछली कक्षाओं से परिचित हैं। इसमें दो रेखाएँ l और m हैं तथा इन्हें एक तीसरी रेखा t क्रमशः भिन्न बिंदुओं A और B पर काटती है। यह तीसरी रेखा क्या कहलाती है? यह एक *तिर्यक रेखा* कहलाती है।

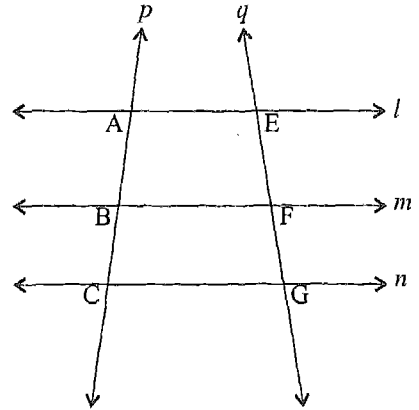
इस आकृति की एक अन्य प्रकार से भी व्याख्या की जा सकती है। हम कहते हैं कि दो रेखाएँ l और m एक तीसरी रेखा t को दो भिन्न बिंदुओं A और B पर प्रतिच्छेद करती हैं। इस प्रकार, दोनों रेखाएँ l और m तीसरी रेखा t पर रेखाखंड AB काटती है। हम इस रेखाखंडों को एक विशेष नाम *अंत:खंड (intercept)* देते हैं। इस प्रकार,

आकृति 9.16

यदि एक तिर्यक रेखा t दो रेखाओं l और m को दो भिन्न बिंदुओं A और B पर प्रतिच्छेद करती है, तो यह कहा जाता है कि रेखाएँ l और m रेखा t पर अंत:खंड AB काटती है।

ध्यान दीजिए कि अंत:खंड AB एक रेखाखंड है। परंतु शब्द 'अंत:खंड' को अंत:खंड AB की लंबाई के लिए भी प्रयोग किया जाता है।

उपर्युक्त विवरण में, हमने रेखाओं l और m के समांतर होने या न होने के बारे में कुछ नहीं कहा है। परंतु यदि l और m समांतर हों और t इन पर लंब हो, तो अंत:खंड AB समांतर रेखाओं l और m के बीच की दूरी के अतिरिक्त कुछ भी नहीं है (आकृति 9.17)। आपको एक चिर-परिचित गुण याद होगा कि दो समांतर रेखाओं के बीच की दूरी प्रत्येक स्थान पर एक जैसी ही होती है। अंत:खंडों के पदों में, हम कह सकते हैं कि

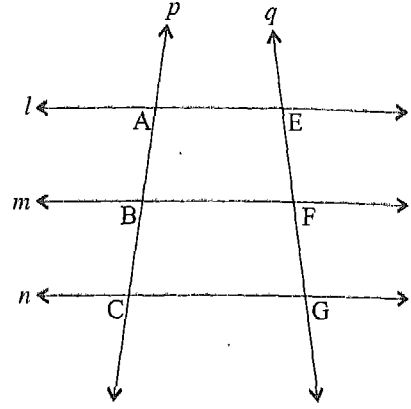
आकृति 9.17

दो समांतर रेखाएँ अपने पर लंब सभी तिर्यक रेखाओं पर समान (बराबर) अंत:खंड बनाती (काटती) हैं।

अब यदि l, m और n परस्पर तीन समांतर रेखाएँ हैं (आकृति 9.18) तथा एक तिर्यक रेखा p उन्हें क्रमश: तीन बिंदुओं A, B और C पर प्रतिच्छेद करती (काटती) है, तो हम कहते हैं कि रेखाओं l, m तथा m, n के युग्म p पर क्रमश: अंत:खंड AB और BC काटते हैं।

इसी प्रकार, यदि एक तिर्यक रेखा q रेखाओं l, m और n को क्रमश: तीन बिंदुओं E, F और G पर प्रतिच्छेद करती है, तो हम कहते हैं कि रेखाओं l, m तथा m, n के युग्म q पर क्रमश: अंत:खंड EF और FG काटते हैं। अब एक स्वाभाविक प्रश्न उठता है: क्या उपर्युक्त चारों अंत:खंडों AB, BC, EF एवं FG के बीच कोई संबंध विद्‌यमान है? अगले दो अनुच्छेदों में, हम क्रियाकलापों की सहायता से इस प्रश्न का उत्तर प्राप्त करने का प्रयत्न करेंगे।

आकृति 9.18

9.5 समान अंतःखंड गुण

क्रियाकलाप 4 : कोई रेखा p खींचिए। इस रेखा पर तीन बिंदु A, B और C (इसी क्रम में) इस प्रकार लीजिए कि AB = BC हो (आकृति 9.19)। A, B और C से होकर क्रमशः तीन रेखाएँ l, m और n इस प्रकार खींचिए कि वे परस्पर समांतर हों। इस प्रकार, हमें एक तिर्यक रेखा p ऐसी प्राप्त है जो तीन समांतर रेखाओं l, m और n को इस प्रकार प्रतिच्छेद कर रही है कि AB = BC है। अब एक अन्य तिर्यक रेखा q ऐसी खींचिए जो रेखाओं l, m और n को क्रमशः बिंदुओ E, F और G पर काटे।

आकृति 9.19

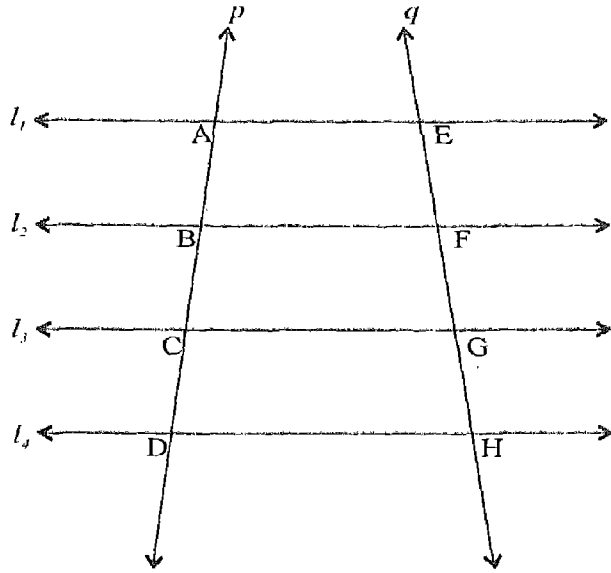
EF एवं FG को मापिए तथा EF–FG ज्ञात कीजिए। इस क्रियाकलाप को दो बार और कीजिए। सुविधा की दृष्टि से, प्रत्येक स्थिति में, आकृति को समान अक्षरों से नामांकित कीजिए तथा आकृतियों को संख्याओं 1, 2 और 3 से क्रमांकित कीजिए। अपने प्रेक्षणों को एक सारणी के रूप में लिखिए, जैसा कि नीचे दर्शाया गया है :

आकृति	EF	FG	EF – FG
1			
2			
3			

आप क्या देखते हैं? आप देखेंगे कि, प्रत्येक स्थिति में, EF – FG या तो शून्य है या इतना कम है कि इसे छोड़ा जा सकता है। इस प्रकार, सभी स्थितियों में EF = FG है।

ध्यान दीजिए कि हमने तीन समांतर रेखाएँ l, m और n इस प्रकार ली कि वे तिर्यक रेखा p पर बराबर (समान) अंतःखंड AB और BC काटती हैं। फिर हमने प्राप्त किया कि ये तीनों समांतर रेखाएँ किसी अन्य तिर्यक रेखा q पर भी समान अंतःखंड EF और FG काटती हैं। इस क्रियाकलाप से निम्न गुण प्रदर्शित होता है :

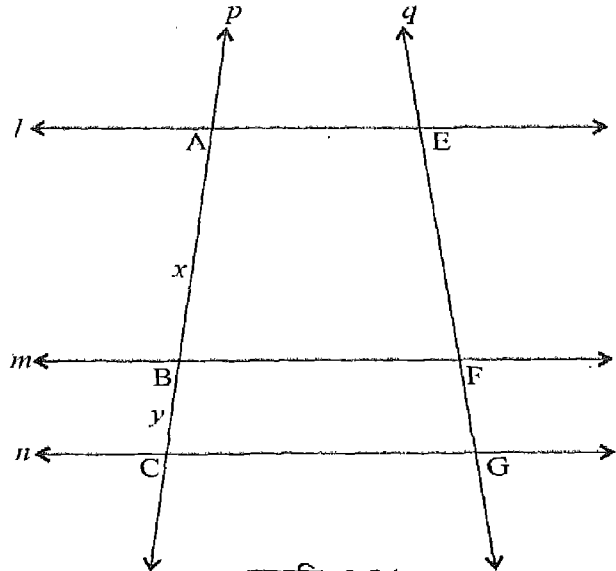
यदि तीन समांतर रेखाएँ किसी तिर्यक रेखा पर समान अंतःखंड काटती (बनाती) हैं, तो वे किसी अन्य तिर्यक रेखा पर समान अंतःखंड काटेंगी (बनाएँगी)।

ो के लिए भी सत्य है, संख्या तीन से अधिक खंडों की संख्या 2 से आकृति 9.20 में, चार और l_4 तिर्यक रेखा p और CD तथा तिर्यक ; EF, FG और GH इस ; = BC = CD है। चूँकि ΞF = FG है। साथ ही, इसलिए FG = GH 3C = CD है, इसलिए स प्रकार, व्यापक रूप के

आकृति 9.20

ाक समांतर रेखाएँ किसी तिर्यक रेखा पर समान अंत:खंड काटती हैं, क रेखा पर भी समान अंत:खंड काटेंगी।

ान अंत:खंड गुण (Equal Intercepts Property) कहा जाता है।

त:खंड गुण

रेखा p खींचिए और उस C इस प्रकार लीजिए कि = y cm हो, जहाँ x और जैसे $x = 5$ और $y = 2$ और C से होकर क्रमश: प्रकार खींचिए कि वे प्रकार हमें एक तिर्यक ो तीन समांतर रेखाओं l, : प्रतिच्छेद करती है कि में $\frac{5}{2}\Big)$ है।

आकृति 9.21

अब रेखाओं l, m और n को क्रमशः E, F और G पर काटती हुई एक अन्य तिर्यक रेखा q खींचिए। EF और FG को मापिए और फिर $y.\text{EF} - x.\text{FG}$ ज्ञात कीजिए। (अर्थात् वर्तमान स्थिति में $2\text{EF} - 5\text{FG}$ ज्ञात कीजिए)।

x और y में से प्रत्येक के दो अन्य मान लेकर, उपर्युक्त क्रियाकलाप को दोहराइए। सुविधा की दृष्टि से, प्रत्येक स्थिति में आकृति को समान अक्षरों से नामांकित कीजिए तथा आकृतियों को संख्याओं 1, 2 और 3 से क्रमांकित कीजिए। अपने प्रेक्षणों को एक सारणी के रूप में लिखिए, जैसा कि नीचे दर्शाया गया है:

आकृति	EF	FG	x	y	y.EF	x.FG	y.EF – x.FG
1							
2							
3							

आप क्या देखते हैं? आप देखेंगे कि प्रत्येक स्थिति में $y.\text{EF} - x.\text{FG}$ या तो शून्य है या इतना कम है कि इसे छोड़ा जा सकता है। इस प्रकार, प्रत्येक स्थिति में, $y.\text{EF} - x.\text{FG} = 0$ है। दूसरे शब्दों में, $\frac{\text{EF}}{\text{FG}} = \frac{x}{y}$ है, जो $\frac{\text{AB}}{\text{BC}}$ के बराबर है।

ध्यान दीजिए कि हमने तीन समांतर रेखाएँ l, m और n ली हैं जो एक तिर्यक रेखा p पर अंतःखंड AB और BC काटती हैं जो $\frac{x}{y}$ के अनुपात में (वर्तमान स्थिति में $\frac{5}{2}$) है। फिर हमें ज्ञात हुआ कि ये तीनों समांतर रेखाएँ ही किसी अन्य तिर्यक रेखा q पर भी अंतःखंड EF और FG उसी अनुपात $\frac{x}{y}$ में काटती हैं। यह क्रियाकलाप निम्नलिखित गुण प्रदर्शित करता है :

यदि तीन समांतर रेखाएँ एक तिर्यक रेखा पर एक निश्चित अनुपात में अंतःखंड काटती हैं, तो वे किसी अन्य तिर्यक रेखा पर भी उसी अनुपात में अंतःखंड काटती हैं।

दूसरे शब्दों में, किन्हीं दो तिर्यक रेखाओं को प्रतिच्छेद करने वाली तीन समांतर रेखाएँ उन पर एक ही (समान) अनुपात में अंतःखंड काटती हैं।

वस्तुतः, यह गुण जिसे *समानुपातिक अंतःखंड गुण* (*Proportional Intercepts Property*) कहते हैं, तीन से अधिक समांतर रेखाओं के लिए भी सत्य है। इस प्रकार, हम कह सकते हैं :

समानुपातिक अंत:खंड गुण :

दो तिर्यक रेखाओं को प्रतिच्छेद करने वाली तीन या अधिक समांतर रेखाएँ उन पर एक ही अनुपात में अंत:खंड काटती हैं।

अब हम इन गुणों को स्पष्ट करने के लिए, कुछ उदाहरण लेते हैं।

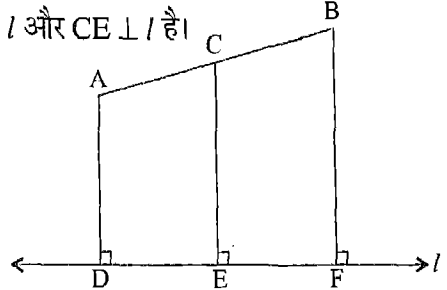
उदाहरण 3 : A और B दो बिंदु हैं जो रेखा l पर स्थित नहीं हैं (आकृति 9.22)।

C रेखाखंड AB का मध्य-बिंदु है, $AD \perp l$, $BF \perp l$ और $CE \perp l$ है।

(i) क्या $AD \parallel CE$ है? क्यों?

(ii) क्या $AD \parallel BF$ है? क्यों?

(iii) क्या $AD \parallel CE \parallel BF$ है? क्यों?

(iv) क्या E रेखाखंड DF का मध्य-बिंदु है? क्यों?

आकृति 9.22

हल : (i) $AD \perp l$ और $CE \perp l$ (दिया है)

अत:, $AD \parallel CE$ (एक ही रेखा पर लंब रेखाएँ)

(ii) $AD \perp l$ और $BF \perp l$ (दिया है)

अत:, $AD \parallel BF$ (एक ही रेखा पर लंब रेखाएँ)

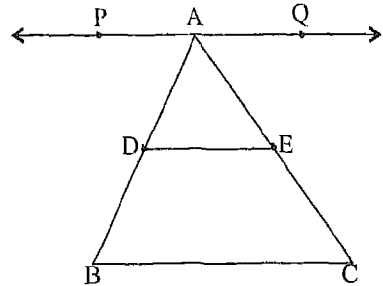
(iii) चूँकि $AD \parallel CE$ और $AD \parallel BF$ है।

अत:, $AD \parallel CE \parallel BF$ (एक ही रेखा के समांतर रेखाएँ)

(iv) तीन समांतर रेखाओं AD, CE और BF के लिए AB एक ऐसी तिर्यक रेखा है कि $AC = CB$ है। (चूँकि C, AB का मध्य-बिंदु है)

अत:, $DE = EF$ (समान अंत:खंड गुण)

अर्थात् E रेखाखंड DF का मध्य-बिंदु है।

उदाहरण 4 : आकृति 9.23 में, ΔABC की भुजा BC के समांतर एक रेखा PAQ है। D भुजा AB का मध्य-बिंदु है और $DE \parallel BC$ है। क्या E भुजा AC का मध्य-बिंदु है?

आकृति 9.23

हल : PAQ ∥ BC और DE ∥ BC (दिया है)

अत:, PAQ, BC और DE ऐसी तीन रेखाएँ हैं जो परस्पर समांतर हैं। (एक ही रेखा के समांतर रेखाएँ)

$AD = DB$ (D भुजा AB का मध्य-बिंदु है)

अत:, $AE = EC$ (समान अंत:खंड गुण)

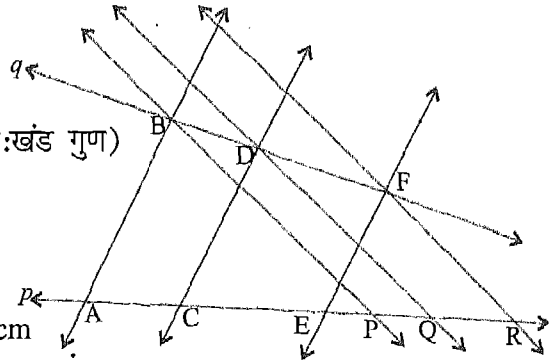
अर्थात् E भुजा AC का मध्य-बिंदु है।

उदाहरण 5 : आकृति 9.24 में, AB ∥ CD ∥ EF है तथा BP ∥ DQ ∥ FR है। यदि AC = 4 cm, CE = 6 cm तथा PQ = 2.4 cm है, तो QR ज्ञात कीजिए।

हल : $\frac{AC}{CE} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ (दिया है)

अत:, $\frac{BD}{DF} = \frac{2}{3} = \frac{PQ}{QR}$ (समानुपातिक अंत:खंड गुण)

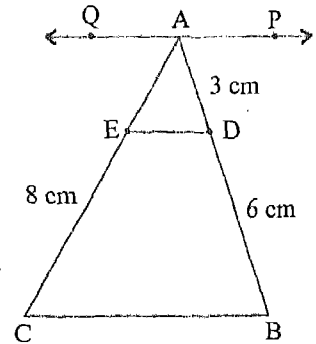
इस प्रकार, $\frac{2.4 \text{ cm}}{QR} = \frac{2}{3}$

या $QR = \frac{3 \times 2.4}{2} \text{ cm} = 3.6 \text{ cm}$

आकृति 9.24

उदाहरण 6 : आकृति 9.25 में, PAQ ∥ DE ∥ BC है। यदि AD = 3cm, DB = 6 cm और EC = 8 cm है, तो AE ज्ञात कीजिए।

हल : $\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB}$ (समानुपातिक अंत:खंड गुण)

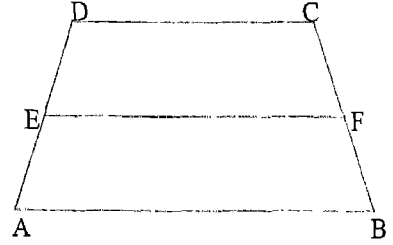
अर्थात् $\frac{AE}{8} = \frac{3}{6} \text{cm}$

या $AE = \frac{8 \times 3}{6} \text{ cm} = 4 \text{ cm}$

आकृति 9.25

प्रश्नावली 9.2

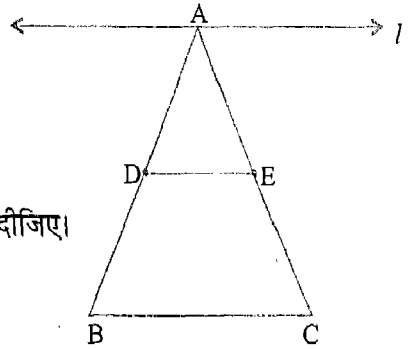
1. आकृति 9.26 में, $AB \parallel DC$, $EF \parallel AB$ और E रेखाखंड AD का मध्य-बिंदु है।

   (i) क्या $AB \parallel EF \parallel DC$ है? क्यों?

   (ii) क्या F रेखाखंड CB का मध्य-बिंदु है? क्यों?

आकृति 9.26

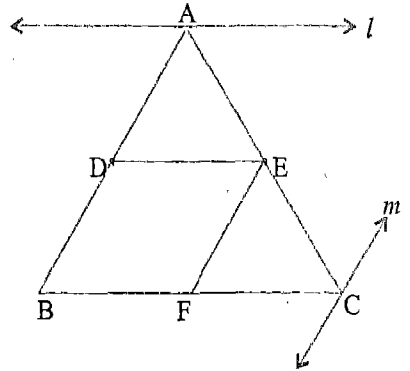
2. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $AB = AC$ है (आकृति 9.27)। साथ ही, $l \parallel DE \parallel BC$ तथा D भुजा AB का मध्य-बिंदु है।

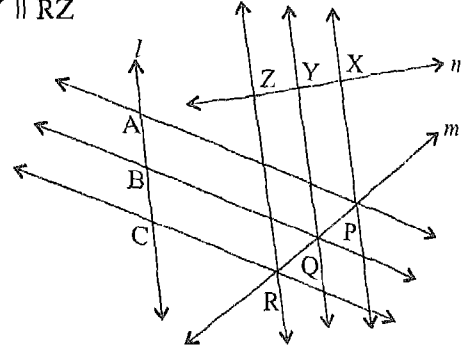
   (i) क्या E भुजा AC का मध्य-बिंदु है? क्यों?

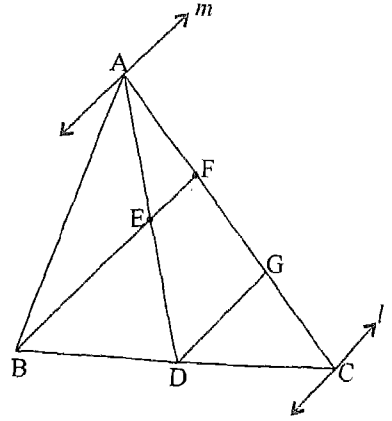
   (ii) क्या Δ ADE भी समद्विबाहु त्रिभुज है? कारण दीजिए।

आकृति 9.27

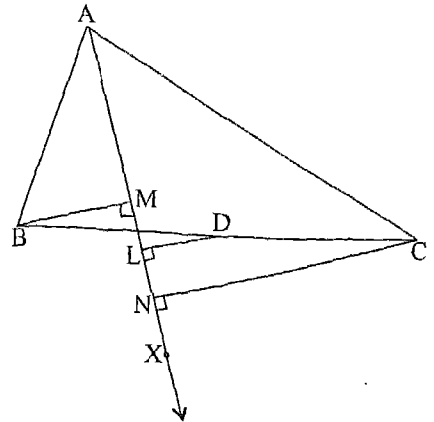
3. आकृति 9.28 में, $l \parallel DE \parallel BC$, $m \parallel EF \parallel AB$ तथा D रेखाखंड AB का मध्य-बिंदु है।

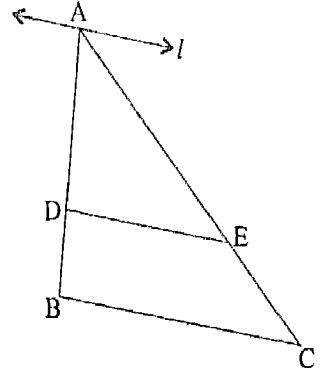
   (i) क्या E रेखाखंड AC का मध्य-बिंदु है? क्यों?

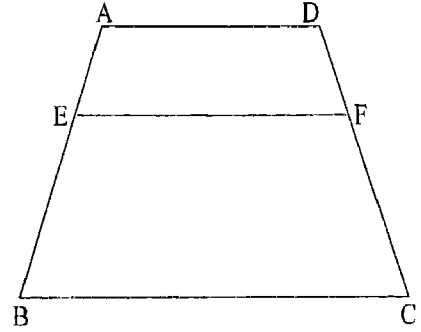
   (ii) क्या F रेखाखंड BC का मध्य-बिंदु है? क्यों?

आकृति 9.28

4. आकृति 9.29 में, AP || BQ || CR, PX || QY || RZ तथा AB = BC है। क्या
   (i) PQ = QR है? क्यों?
   (ii) XY = YZ है? क्यों?

आकृति 9.29

5. आकृति 9.30 में, AD त्रिभुज ABC की एक माध्यिका है, E रेखाखंड AD का मध्य-बिंदु है तथा l || DG || BF || m है।
   (i) क्या FG = GC है? क्यों?
   (ii) क्या AF = FG है? क्यों?
   (iii) यदि AC = 4.5 cm है, तो AF ज्ञात कीजिए।

आकृति 9.30

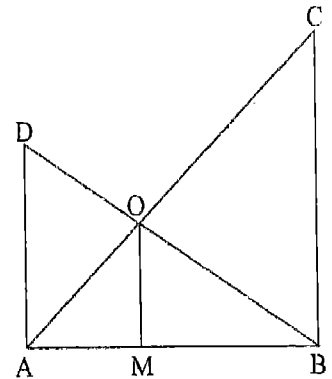
6. त्रिभुज ABC की भुजा BC का मध्य-बिंदु D है तथा किरण AX आकृति 9.31 में दर्शाए अनुसार खींची गई है। BM, CN और DL किरण AX पर लंब खींचे गए हैं जो AX पर क्रमशः M, N और L पर मिलते हैं।
   (i) क्या रेखाओं BM, LD और NC के लिए AX एक तिर्यक रेखा है? क्यों?
   (ii) क्या रेखाओं BM, LD और NC के लिए CB एक तिर्यक रेखा है? क्यों?
   (iii) क्या रेखाएँ BM, LD और NC परस्पर समांतर हैं? क्यों?
   (iv) क्या ML = LN है? क्यों?

आकृति 9.31

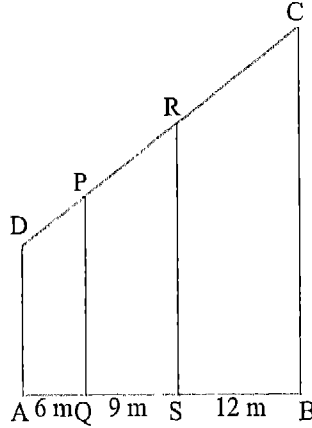
7. आकृति 9.32 में l || ED || CB है। यदि AB = 12 cm, AC = 16 cm और EC = 4 cm है, तो AD ज्ञात कीजिए।

आकृति 9.32

8. आकृति 9.33 में AD || EF || BC है। यदि EB = 2AE और DF = 1.5 cm है, तो FC की लंबाई ज्ञात कीजिए।

आकृति 9.33

9. DA, CB और OM में से प्रत्येक रेखाखंड AB पर लंब है, जहाँ O रेखाखंडों AC और DB का प्रतिच्छेद बिंदु है (आकृति 9.34)। यदि OA = 2.4 cm और OC = 3.6 cm है, तो ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{AM}{BM}$

(ii) DO, यदि BO = 3 cm है।

आकृति 9.34

10. एक भूखंड ABCD को तीन छोटे भूखंडों AQPD, PQSR और RSBC में विभाजित किया गया है, जैसा कि आकृति 9.35 में दर्शाया गया है। यदि CD = 30 m है तथा DA ∥ PQ ∥ RS ∥ CB है, तो DP, PR और RC की लंबाइयाँ ज्ञात कीजिए।

आकृति 9.35

11. तीन समांतर रेखाएँ l, m और n एक तिर्यक रेखा p से क्रमशः बिंदुओं A, B और C पर इस प्रकार प्रतिच्छेदित हैं कि $AB \neq BC$ है। q एक अन्य तिर्यक रेखा है जो इन तीनों समांतर रेखाओं को क्रमशः D, E और F पर प्रतिच्छेद करती है। क्या DE = EF है? क्यों?

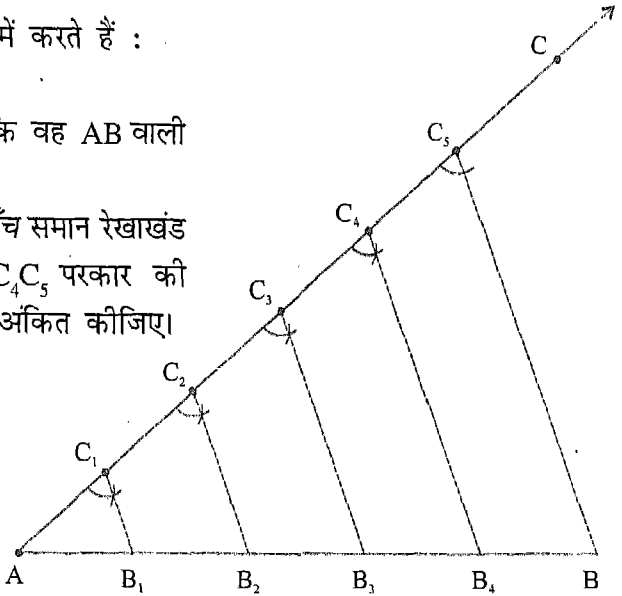
12. तीन समांतर रेखाएँ p, q और r एक तिर्यक रेखा l से क्रमशः बिंदुओं A, B और C पर इस प्रकार प्रतिच्छेदित हैं कि $\frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}$ है। m एक अन्य तिर्यक रेखा है जो इन तीनों रेखाओं को क्रमशः P, Q और R पर प्रतिच्छेद करती है। क्या $\frac{PQ}{QR} = \frac{2}{5}$ है? क्यों?

9.7 किसी रेखाखंड को समान भागों में विभाजित करना

पिछली कक्षाओं में, हम एक रेखाखंड को पटरी और परकार की सहायता से दो बराबर भागों में विभाजित करना सीख चुके हैं। आपको याद होगा कि इस तकनीक का प्रयोग करके हम एक रेखाखंड को, मान लीजिए, 4, 8, 16, इत्यादि बराबर (समान) भागों में विभाजित करने में समर्थ हो गए थे। अब हम सीखेंगे कि एक रेखाखंड को पटरी और परकार की सहायता से दिए गए समान भागों में किस प्रकार विभाजित किया जाता है। हम इस प्रक्रिया को एक उदाहरण द्वारा स्पष्ट करेंगे। इसके लिए, आप कक्षा VI में सीखी गई आधारभूत रचनाओं का स्मरण करें।

उदाहरण 7 : 8 cm वाले एक रेखाखंड AB को पाँच समान भागों में विभाजित कीजिए।

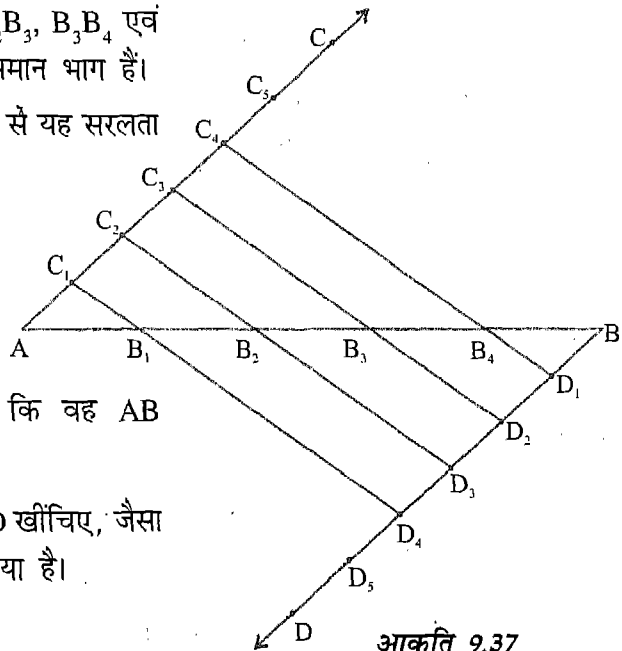
हल : हम यह रचना निम्न चरणों में करते हैं :

1. AB = 8 cm खींचिए।
2. एक किरण AC ऐसी खींचिए कि वह AB वाली रेखा में न हो (आकृति 9.36)।
3. A से प्रारंभ करते हुए, AC पर पाँच समान रेखाखंड AC_1, C_1C_2, C_2C_3, C_3C_4 एवं C_4C_5 परकार की सहायता से किसी भी माप के अंकित कीजिए।
4. C_5B को मिलाइए।
5. बिंदुओं C_1, C_2, C_3 एवं C_4 से होकर C_5B के समांतर रेखाएँ खींचिए जो AB को क्रमशः बिंदुओं B_1, B_2, B_3 एवं B_4 पर प्रतिच्छेद करती हैं।

   तब, रेखाखंड AB_1, B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4 एवं B_4B ही AB के पाँच वांछित समान भाग हैं।

आकृति 9.36

टिप्पणी : आप समान अंतःखंड गुण से यह सरलता से देख सकते हैं कि $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B$ है।

वैकल्पिक विधि :

1. AB = 8 cm खींचिए।
2. एक किरण AC ऐसी ख़ींचिए कि वह AB वाली रेखा में न हो।
3. CA के समांतर एक किरण BD खींचिए, जैसा कि आकृति 9.37 में दर्शाया गया है।

आकृति 9.37

4. A से प्रारंभ करते हुए, कोई भी मापन लेकर, AC पर *पाँच* समान रेखाखंड AC_1, C_1C_2, C_2C_3, C_3C_4 एवं C_4C_5 अंकित कीजिए।
5. B से प्रारंभ करते हुए, चरण 4 वाले मापन ही लेकर, BD पर *पाँच* समान रेखाखंड BD_1, D_1D_2, D_2D_3, D_3D_4 एवं D_4D_5 अंकित कीजिए।
6. C_1D_4, C_2D_3, C_3D_2 एवं C_4D_1 को मिलाइए जो AB को क्रमशः B_1, B_2, B_3 एवं B_4 पर प्रतिच्छेद करती हैं।

   तब, AB_1, B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4 एवं B_4B ही AB के वांछित पाँच समान भाग हैं।

टिप्पणी : AD_5 और C_5B को मिलाकर, आप सरलता से देख सकते हैं कि $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B$ है।

9.8 किसी रेखाखंड को एक दिए हुए अनुपात में अंतः विभाजित करना

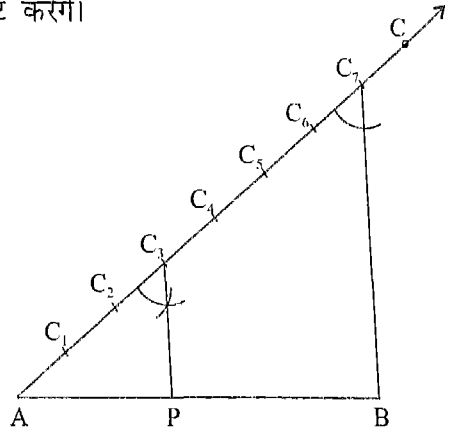
हम इस रचना को पुनः एक उदाहरण द्वारा स्पष्ट करेंगे।

उदाहरण 8 : 5 cm लंबाई वाले एक रेखाखंड AB को 3:4 के अनुपात में अंतः विभाजित कीजिए।

हल : हम यह रचना निम्न चरणों में करते हैं :

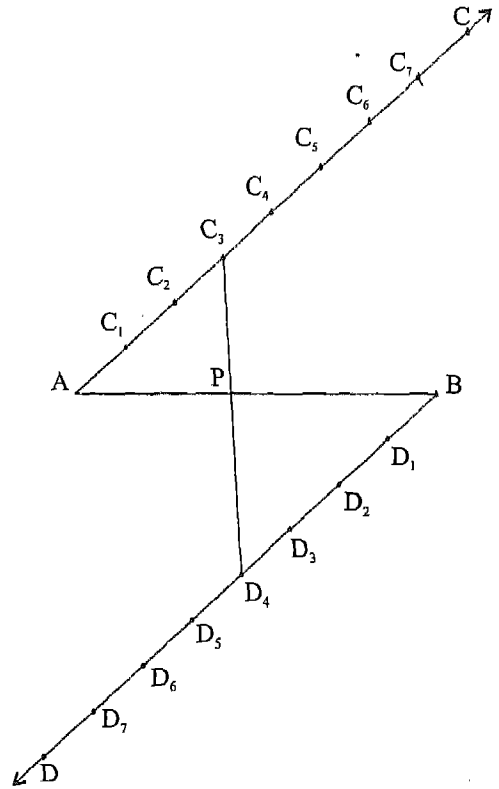
1. 5 cm लंबाई का एक रेखाखंड AB खींचिए।
2. एक किरण AC ऐसी खींचिए कि वह AB वाली रेखा में न हो (आकृति 9.38)।
3. AC पर परकार की सहायता से *सात* (3+4) समान रेखाखंड AC_1, C_1C_2, C_2C_3, C_3C_4, C_4C_5, C_5C_6 एवं C_6C_7 अंकित कीजिए।

आकृति 9.38

4. C_7B को मिलाइए।
5. A से प्रारंभ करके अभी खींचे गए *तीन* रेखाखंडों को गिनकर हम C_3 पर पहुँचते हैं। इस बिंदु C_3 से होकर हम C_7B के समांतर एक रेखा खींचते हैं, जो AB को बिंदु P पर प्रतिच्छेद करती है।

तब, P ही वह बिंदु है जो रेखाखंड AB को 3:4 के अनुपात में दो भागों AP और PB में अंत: विभाजित करता है। हम इस रचना की जाँच AP और PB के वास्तविक मापनों द्वारा कर सकते हैं।

टिप्पणी : यह तथ्य कि $\frac{AP}{PB} = \frac{AC_3}{C_3C_7} = \frac{3}{4}$ है, समानुपातिक अंत:खंड गुण से सरलता से प्राप्त हो जाता है।

वैकल्पिक विधि :

1. लंबाई 5 cm का एक रेखाखंड AB खींचिए।
2. एक किरण AC ऐसी खींचिए कि वह AB वाली रेखा में न हो।
3. एक किरण BD, CA के समांतर खींचिए जैसा कि आकृति 9.39 में दर्शाया गया है।
4. A से प्रारंभ करके, परकार की सहायता से, AC पर किसी भी माप के *सात* (3 + 4) समान रेखाखंड AC_1, C_1C_2, C_2C_3, C_3C_4, C_4C_5, C_5C_6 एवं C_6C_7 अंकित कीजिए।
5. B से प्रारंभ करके, चरण 4 वाली लंबाई के *सात* (3 + 4) समान रेखाखंड BD_1, D_1D_2, D_2D_3, D_3D_4, D_4D_5, D_5D_6 एवं D_6D_7 किरण BD पर अंकित कीजिए।
6. AC के अनुदिश *तीन* रेखाखंड गिनने पर, हम बिंदु C_3 पर पहुँचते हैं। BD के अनुदिश *चार* रेखाखंड गिनने पर, हम बिंदु D_4 पर पहुँचते हैं। इन बिंदुओं C_3 और D_4 को मिलाने वाला रेखाखंड AB को P पर प्रतिच्छेद करता है। तब P ही वह बिंदु है जो AB को 3:4 के अनुपात में अंत: विभाजित करता है।

आकृति 9.39

टिप्पणी : AD_7 और C_7B को मिलाकर आप सरलता से देख सकते हैं कि

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AC_3}{C_3C_7} = \frac{D_7D_4}{D_4B} = \frac{3}{4} \text{ है।}$$

प्रश्नावली 9.3

1. 7.5 cm लंबाई का एक रेखाखंड AB खींचिए और इसे तीन समान भागों में विभाजित कीजिए। प्रत्येक भाग की लंबाई मापिए।
2. 8.5 cm लंबाई का एक रेखाखंड AB खींचिए और इसे पाँच समान भागों में विभाजित कीजिए। प्रत्येक भाग की लंबाई मापिए।
3. 6.6 cm लंबाई का एक रेखाखंड PQ खींचिए। इसे छः समान भागों में विभाजित कीजिए।
4. 12 cm लंबाई का एक रेखाखंड PQ खींचिए और इसे 3 : 5 के अनुपात में अंतः विभाजित कीजिए। मापन द्वारा अपनी रचना की जाँच कीजिए।
5. 10 cm लंबाई का एक रेखाखंड MN खींचिए। इसे 2 : 3 के अनुपात में अंतः विभाजित कीजिए। छोटे भाग को मापिए।
6. 5.6 cm लंबाई का एक रेखाखंड AB खींचिए। AB पर एक बिंदु P ऐसा प्राप्त कीजिए कि $\frac{AP}{PB} = \frac{2}{5}$ हो। AP और PB को मापिए और अपनी रचना की जाँच कीजिए।
7. 6 cm लंबाई का एक रेखाखंड MN खींचिए। MN पर एक बिंदु P ऐसा प्राप्त कीजिए कि $\frac{MP}{PN} = \frac{1}{2}$ हो। अपनी रचना की जाँच कीजिए।
8. कोई रेखाखंड AB खींचिए। AB पर एक बिंदु P ज्ञात कीजिए कि AP : PB = 2 : 3 हो। AP और PB को मापिए और जाँच कीजिए कि $\frac{AP}{PB} = \frac{2}{3}$ है।

याद रखने योग्य बातें

1. एक ही रेखा के समांतर दो रेखाएँ परस्पर समांतर होती हैं।
2. दो प्रतिच्छेदी रेखाएँ एक ही रेखा के समांतर नहीं हो सकती।
3. एक ही रेखा पर लंब दो रेखाएँ परस्पर समांतर होती हैं।
4. यदि एक तिर्यक रेखा t दो रेखाओं l और m को भिन्न बिंदुओं A और B पर प्रतिच्छेद करती है, तो यह कहा जाता है कि रेखाएँ l और m रेखा t पर अंत:खंड AB बनाती (काटती) हैं।
5. दो समांतर रेखाएँ उन सभी रेखाओं पर समान (बराबर) अंत:खंड काटती हैं जो उन पर लंब होती हैं।
6. समान अंत:खंड गुण : यदि तीन या अधिक समांतर रेखाएँ एक तिर्यक रेखा पर समान अंत:खंड काटती हैं, तो वे रेखाएँ किसी अन्य तिर्यक रेखा पर भी समान अंत:खंड काटती हैं।
7. समानुपातिक अंत:खंड गुण : तीन या अधिक समांतर रेखाएँ जो दो तिर्यक रेखाओं को प्रतिच्छेद करती हैं उन रेखाओं पर समान अनुपात में अंत:खंड काटती हैं।
8. समान अंत:खंड गुण का प्रयोग करके हम एक दिए हुए रेखाखंड को दिए गए समान भागों में विभाजित कर सकते हैं।
9. समानुपातिक अंत:खंड गुण का प्रयोग करके हम एक दिए हुए रेखाखंड को एक दिए हुए अनुपात में अंत: विभाजित कर सकते हैं।

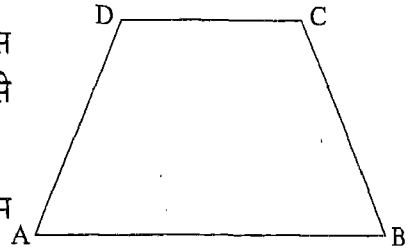
अध्याय

विशेष प्रकार के चतुर्भुज

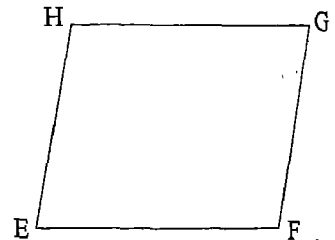
10.1 भूमिका

कक्षा VII में, आप चतुर्भुज, उसकी भुजाओं, कोणों, विकर्णों तथा चतुर्भुज के कोणों के योग से संबंधित एक महत्त्वपूर्ण गुण के बारे में पढ़ चुके हैं। इस अध्याय में, हम कुछ विशेष प्रकार के चतुर्भुजों, जैसे समलंब, समांतर चतुर्भुज, आयत, समचतुर्भुज एवं वर्ग के बारे में अध्ययन करेंगे। हम क्रियाकलापों द्वारा इस प्रकार के चतुर्भुजों के कुछ गुणों का भी अध्ययन करेंगे।

10.2 समलंब और समांतर चतुर्भुज

आकृति 10.1 में दिए चतुर्भुज ABCD को देखिए। इस चतुर्भुज में सम्मुख भुजाएँ AB और DC समांतर हैं। इसे *समलंब* (*trapezium*) कहते हैं। इस प्रकार,

एक चतुर्भुज जिसमें सम्मुख भुजाओं के युग्मों में से कम से कम एक भुजाएँ समांतर हों, समलंब कहलाता है।

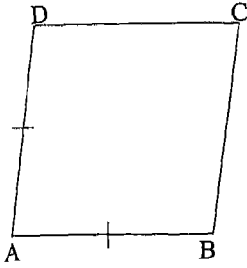
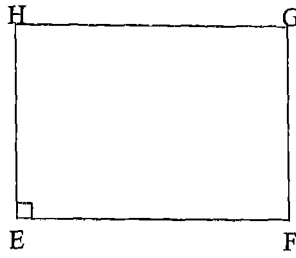
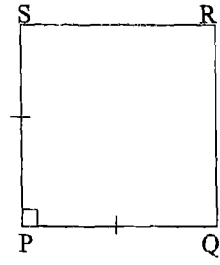
आकृति 10.1

अब आकृति 10.2 में दिए चतुर्भुज EFGH को देखिए। यह एक समलंब है क्योंकि EF || HG है। यह इसलिए भी समलंब है, क्योंकि EH || FG है। इस प्रकार, यह एक विशिष्ट समलंब है जिसमें सम्मुख भुजाएँ समांतर हैं। इस प्रकार के समलंब को *समांतर चतुर्भुज* (*parallelogram*) कहते हैं। इस प्रकार,

आकृति 10.2

समांतर चतुर्भुज एक ऐसा चतुर्भुज होता है जिसमें सम्मुख भुजाओं के दोनों युग्मों की भुजाएँ समांतर होती हैं।

टिप्पणी : आप यह सरलता से देख सकते हैं कि प्रत्येक समांतर चतुर्भुज एक समलंब होता है, परंतु इसका विलोम सत्य नहीं है अर्थात् प्रत्येक समलंब एक समांतर चतुर्भुज नहीं होता है। उदाहरणार्थ, आकृति 10.1 का समलंब एक समांतर चतुर्भुज नहीं है।

10.3 समचतुर्भुज, आयत और वर्ग

आकृति 10.3 में दिए समांतर चतुर्भुजों को देखिए। आकृति 10.3 (i) में, ABCD एक ऐसा समांतर चतुर्भुज है, जिसमें आसन्न भुजाओं के एक युग्म की भुजाएँ AB और AD बराबर हैं।

आकृति 10.3

इस प्रकार के समांतर चतुर्भुज को *समचतुर्भुज* (*rhombus*) कहते हैं। इस प्रकार,

एक समांतर चतुर्भुज जिसमें आसन्न भुजाओं के एक युग्म की भुजाएँ बराबर हों समचतुर्भुज कहलाता है।

दूसरे शब्दों में, समचतुर्भुज एक ऐसा चतुर्भुज है जिसमें सम्मुख भुजाओं के दोनों युग्मों की भुजाएँ समांतर होती हैं तथा आसन्न भुजाओं के एक युग्म की भुजाएँ बराबर होती हैं। ध्यान दीजिए कि आकृति 10.2 का समांतर चतुर्भुज एक समचतुर्भुज नहीं है।

आकृति 10.3 (ii) में, EFGH एक ऐसा समांतर चतुर्भुज है जिसमें $\angle E = 90°$ है। इस प्रकार के समांतर चतुर्भुज को *'आयत* (*rectangle*) कहते हैं। इस प्रकार,

एक समांतर चतुर्भुज जिसमें एक कोण समकोण हो आयत कहलाता है।

दूसरे शब्दों में, आयत एक ऐसा चतुर्भुज है जिसमें सम्मुख भुजाओं के दोनों युग्मों की भुजाएँ समांतर होती हैं तथा एक कोण समकोण होता है। ध्यान दीजिए कि आकृति 10.2 का समांतर चतुर्भुज एक आयत नहीं है।

आकृति 10.3 (iii) में, PQRS एक ऐसा समांतर चतुर्भुज है जिसमें आसन्न भुजाओं के एक युग्म की भुजाएँ PQ और PS बराबर है तथा $\angle P = 90°$ है। इस प्रकार के समांतर चतुर्भुज को *वर्ग* (*square*) कहते हैं। इस प्रकार,

एक समांतर चतुर्भुज जिसमें आसन्न भुजाओं के एक युग्म की भुजाएँ बराबर हों तथा एक कोण समकोण हो वर्ग कहलाता है।

दूसरे शब्दों में, वर्ग एक ऐसा चतुर्भुज है जिसमें सम्मुख भुजाओं के दोनों युग्मों की भुजाएँ समांतर होती हैं, आसन्न भुजाओं के एक युग्म की भुजाएँ बराबर होती हैं तथा एक कोण समकोण होता है। ध्यान दीजिए कि आकृति 10.3 (i) का समचतुर्भुज एक वर्ग नहीं है तथा आकृति 10.3 (ii) का आयत भी एक वर्ग नहीं है।

उपर्युक्त चर्चा से, हम सरलता से देख सकते हैं कि

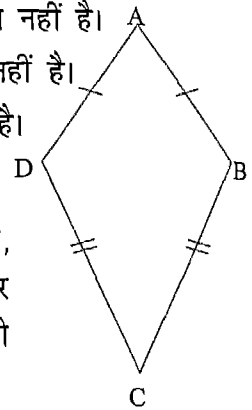
(i) प्रत्येक समचतुर्भुज एक समांतर चतुर्भुज है, परंतु इसका विलोम सत्य नहीं है।

(ii) प्रत्येक आयत एक समांतर चतुर्भुज है, परंतु इसका विलोम सत्य नहीं है।

(iii) प्रत्येक वर्ग एक समांतर चतुर्भुज है, परंतु इसका विलोम सत्य नहीं है।

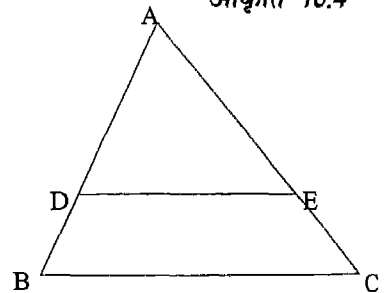
(iv) प्रत्येक वर्ग एक समचतुर्भुज है, परंतु इसका विलोम सत्य नहीं है।

(v) प्रत्येक वर्ग एक आयत है, परंतु इसका विलोम सत्य नहीं है।

टिप्पणी : आकृति 10.4 को देखिए। यहाँ ABCD एक चतुर्भुज है, जिसमें AD = AB तथा CD = CB है। स्पष्ट है कि यह आकृति ऊपर चर्चित किए गए विशेष प्रकार के चतुर्भुजों से भिन्न है। इस आकृति को एक *पतंग* (*kite*) कहते हैं।

A B C D

आकृति 10.4

प्रश्नावली 10.1

1. आकृति 10.5 में DE ∥ BC है। BCED किस प्रकार का चतुर्भुज है?

आकृति 10.5

2. एक समलंब एक समांतर चतुर्भुज से किस प्रकार भिन्न है?

3. ABCD एक समांतर चतुर्भुज है। आप इसे क्या विशिष्ट नाम देंगे, यदि निम्नलिखित अतिरिक्त तथ्य ज्ञात हो?

   (i) $AB = AD$ है। (ii) $\angle DAB = 90°$ है।

   (iii) $AB = AD$ और $\angle DAB = 90°$ है।

4. ABCD एक समलंब है, जिसमें $AB \parallel DC$ है। यदि $\angle A = \angle B = 40°$ है, तो अन्य दोनों कोणों के माप ज्ञात कीजिए।

5. चतुर्भुज PQRS के कोणों P, Q, R और S का अनुपात $1:3:7:9$ है।

   (i) प्रत्येक कोण का माप ज्ञात कीजिए। (ii) क्या PQRS एक समलंब है? क्यों?

   (iii) क्या PQRS एक समांतर चतुर्भुज है? क्यों?

6. निम्नलिखित कथनों में से प्रत्येक के लिए बताइए कि यह कथन सत्य (T) है या असत्य (F) :

   (i) प्रत्येक आयत एक समांतर चतुर्भुज है। (ii) प्रत्येक वर्ग एक आयत है।

   (iii) प्रत्येक समांतर चतुर्भुज एक समचतुर्भुज है। (iv) प्रत्येक वर्ग एक समचतुर्भुज है।

   (v) प्रत्येक आयत एक वर्ग है। (vi) प्रत्येक समांतर चतुर्भुज एक आयत है।

   (vii) प्रत्येक वर्ग एक समांतर चतुर्भुज है। (viii) प्रत्येक समचतुर्भुज एक समांतर चतुर्भुज है।

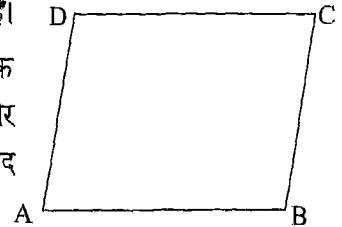
   (ix) प्रत्येक समचतुर्भुज एक वर्ग है। (x) प्रत्येक समांतर चतुर्भुज एक वर्ग है।

   (xi) प्रत्येक समांतर चतुर्भुज एक समलंब है। (xii) प्रत्येक समलंब एक समांतर चतुर्भुज है।

   (xiii) प्रत्येक वर्ग एक समलंब है। (xiv) प्रत्येक समलंब एक वर्ग है।

10.4 समांतर चतुर्भुज के गुण

हम जानते हैं कि समांतर चतुर्भुज एक ऐसा चतुर्भुज होता है, जिसमें सम्मुख भुजाओं के दोनों युग्मों की भुजाएँ समांतर होती हैं।

आकृति 10.6 में, ABCD एक समांतर चतुर्भुज है, क्योंकि $AB \parallel DC$ तथा $AD \parallel BC$ है। समांतर चतुर्भुज की भुजाओं और कोणों के विषय में हम और अधिक क्या कह सकते हैं? शायद

आकृति 10.6

सम्मुख भुजाएँ AB और DC बराबर लंबाई की हैं तथा AD और BC भी बराबर लंबाई की हैं। साथ ही, ऐसा प्रतीत होता है कि सम्मुख कोण A और C बराबर माप के हैं तथा ऐसा ही सम्मुख कोणों B और D के मापों के लिए भी है। आइए जाँच करें।

क्रियाकलाप 1 : समांतर रेखाओं का एक युग्म खींचिए। पहले युग्म की समांतर रेखाओं को प्रतिच्छेद करते हुए, समांतर रेखाओं का एक अन्य युग्म खींचिए। इस प्रकार प्राप्त समांतर चतुर्भुज को ABCD से नामांकित कीजिए।

इसी प्रकार, दो और समांतर चतुर्भुज खींचिए। इनमें से भी प्रत्येक को ABCD से नामांकित कीजिए। इन तीनों समांतर चतुर्भुजों को संख्याओं 1, 2 और 3 से क्रमांकित कीजिए।

प्रत्येक समांतर चतुर्भुज में AB, BC, CD और DA को मापिए। अपने प्रेक्षणों को एक सारणी के रूप में लिखिए जैसा कि नीचे दर्शाया गया है :

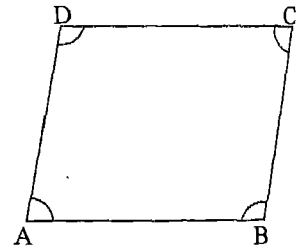
समांतर चतुर्भुज	*सम्मुख भुजाओं का पहला युग्म*			*सम्मुख भुजाओं का दूसरा युग्म*		
	AB	DC	AB – DC	AD	BC	AD – BC
1						
2						
3						

आप क्या देखते हैं? आप देखेंगे कि प्रत्येक स्थिति में, अंतर AB – DC और AD – BC या तो शून्य हैं या इतने कम हैं कि इन्हें छोड़ा जा सकता है। दूसरे शब्दों में,

AB = DC और AD = BC

है। इस क्रियाकलाप से निम्न गुण प्रदर्शित होता है :

समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं।

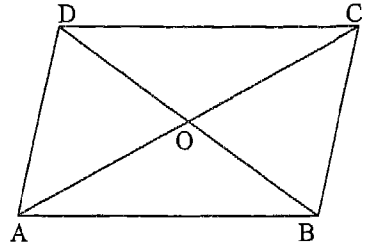
क्रियाकलाप 2 : क्रियाकलाप 1 की तरह, तीन समांतर चतुर्भुज ABCD खींचिए और उन्हें संख्याओं 1, 2 और 3 से क्रमांकित कीजिए (आकृति 10.7)। इनमें से प्रत्येक समांतर चतुर्भुज में ∠A, ∠C, ∠B और ∠D को मापिए। अपने प्रेक्षणों को आगे दर्शाए अनुसार एक सारणी के रूप में लिखिए :

आकृति 10.7

समांतर चतुर्भुज	सम्मुख भुजाओं का पहला युग्म			सम्मुख भुजाओं का दूसरा युग्म		
	$\angle A$	$\angle C$	$\angle A - \angle C$	$\angle B$	$\angle D$	$\angle B - \angle D$
1						
2						
3						

आप क्या देखते हैं? आप देखेंगे कि प्रत्येक स्थिति में, अंतर $\angle A - \angle C$ और $\angle B - \angle D$ या तो शून्य हैं या इतने कम हैं कि इन्हें छोड़ा जा सकता है। दूसरे शब्दों में, $\angle A = \angle C$ और $\angle B = \angle D$ है।

इस क्रियाकलाप से निम्न गुण प्रदर्शित होता है :

समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

आकृति 10.8 को देखिए जिसमें समांतर चतुर्भुज ABCD के दोनों विकर्ण AC और BD बिंदु O पर प्रतिच्छेद कर रहे हैं। ऐसा प्रतीत होता है कि O विकर्णों AC और BD दोनों का ही मध्य-बिंदु है। आइए इसकी जाँच करें।

आकृति 10.8

क्रियाकलाप 3 : क्रियाकलाप 1 की तरह, एक समांतर चतुर्भुज ABCD खींचिए; AC और BD को मिलाइए और मान लीजिए कि इनका प्रतिच्छेद बिंदु O है। दो और समांतर चतुर्भुज खींचिए। इनमें से प्रत्येक समांतर चतुर्भज को ABCD से नामांकित कीजिए। प्रत्येक समांतर चतुर्भुज में AC और BD को मिलाइए तथा इनके प्रतिच्छेद बिंदु को O से अंकित कीजिए। तीनों समांतर चतुर्भुजों को संख्याओं 1, 2 और 3 से क्रमांकित कीजिए।

प्रत्येक आकृति में OA, OC, OB और OD को मापिए। अंतरों OA – OC तथा OB – OD को ज्ञात कीजिए। अपने प्रेक्षणों को एक सारणी के रूप में नीचे दर्शाए अनुसार लिखिए :

समांतर चतुर्भुज	पहला विकर्ण AC			दूसरा विकर्ण BD		
	OA	OC	OA – OC	OB	OD	OB – OD
1						
2						
3						

आप क्या देखते हैं? आप देखेंगे कि प्रत्येक स्थिति में, OA – OC और OB – OD या तो शून्य हैं या इतने कम हैं कि इन्हें छोड़ा जा सकता है। इस प्रकार, प्रत्येक स्थिति में, OA = OC और OB = OD है।

इस क्रियाकलाप से निम्न गुण प्रदर्शित होता है :

समांतर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।

अब हम उपर्युक्त प्रेक्षणों का सारांश लिखते हैं :

एक समांतर चतुर्भुज में,

(i) सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं,

(ii) सम्मुख कोण बराबर होते हैं तथा

(iii) विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।

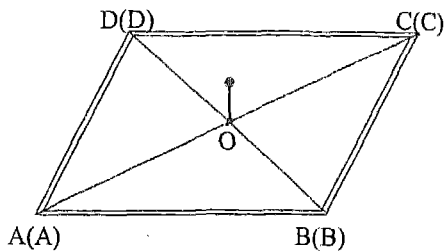
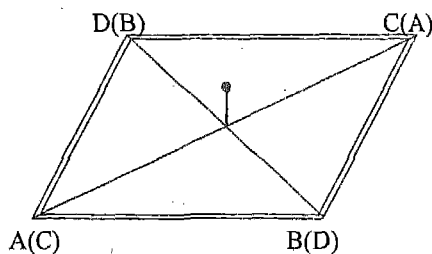
अब हम समांतर चतुर्भुज के उपर्युक्त तीनों गुणों को प्रदर्शित करने के लिए एक और क्रियाकलाप देते हैं।

क्रियाकलाप 4 : एक गत्ते पर एक समांतर चतुर्भुज ABCD खींचिए। AC और BD को मिलाकर उनका प्रतिच्छेद बिंदु O प्राप्त कीजिए। एक अक्स कागज (tracing paper) की सहायता से एक अन्य गत्ते में से पहले समांतर चतुर्भुज के सर्वांगसम एक समांतर चतुर्भुज काटिए। इस समांतर चतुर्भुज को भी ABCD से नामांकित कीजिए। मान लीजिए इसके विकर्ण AC और BD बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। अब बिंदु O पर एक पिन या कील स्थिर करके दूसरे समांतर चतुर्भुज को पहले समांतर चतुर्भुज पर इस प्रकार रखिए कि संगतता ABCD ↔ ABCD के अंतर्गत एक-दूसरे को पूर्णतया ढक ले (आकृति 10.9)।

D(D) C(C) O A(A) B(B)

आकृति 10.9

आइए अब ऊपरी समांतर चतुर्भुज को बिंदु O के प्रति इस प्रकार घुमाएँ कि इसका शीर्ष A अन्य समांतर चतुर्भुज के शीर्ष C की स्थिति में आ जाए (आकृति 10.10)। घूर्णन करने वाले समांतर चतुर्भुज के शीर्षों B, C और D की स्थितियों का

D(B) C(A) A(C) B(D)

आकृति 10.10

क्या होता है? आप देखेंगे कि शीर्ष B अन्य समांतर चतुर्भुज के शीर्ष D के स्थान पर आ जाता है। इसी प्रकार, C अन्य समांतर चतुर्भुज के शीर्ष A के स्थान पर तथा D अन्य समांतर चतुर्भुज के शीर्ष B के स्थान पर आ जाता है। आप यह भी देख सकते हैं कि इस स्थिति में एक समांतर चतुर्भुज दूसरे समांतर चतुर्भुज को पूर्णतया ढक लेता है।

इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि

(i) $AB = CD$ और $AD = BC$ है,

(ii) $\angle A = \angle C$ और $\angle B = \angle D$ है तथा

(iii) $OA = OC$ और $OB = OD$ है।

दूसरे शब्दों में, हमने पुनः इसकी जाँच कर ली है कि

(i) समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती है,

(ii) समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं तथा

(iii) समांतर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।

आइए, इन परिणामों को स्पष्ट करने के लिए कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 1 : किसी समांतर चतुर्भुज की एक भुजा 4.8 cm है तथा अन्य भुजा पहली भुजा की $\frac{3}{2}$ गुनी है। इस समांतर चतुर्भुज का परिमाप ज्ञात कीजिए।

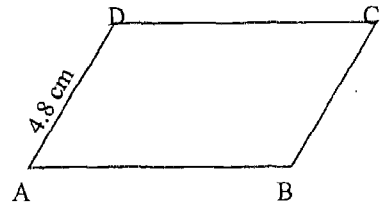
हल : मान लीजिए ABCD एक समांतर चतुर्भुज है (आकृति 10.11)। भुजा $AD = 4.8$ cm है। चूँकि समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं, इसलिए $BC = 4.8$ cm है। दिए हुए प्रतिबंध के अनुसार, समांतर चतुर्भुज की भुजा $AB = \frac{3}{2} \times 4.8 \text{ cm} = 7.2 \text{ cm}$

D C 4.8 cm A B

आकृति 10.11

इसलिए, सम्मुख भुजा $DC = 7.2$ cm

अतः, समांतर चतुर्भुज का परिमाप $= 4.8 \text{ cm} + 7.2 \text{ cm} + 4.8 \text{ cm} + 7.2 \text{ cm} = 24 \text{ cm}$

उदाहरण 2 : किसी समांतर चतुर्भुज के दो आसन्न कोणों का अनुपात 1:2 है। समांतर चतुर्भुज के सभी कोण ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए ABCD एक समांतर चतुर्भुज है तथा इसके दो आसन्न कोणों B और C का अनुपात 1:2 है (आकृति 10.12)।

$\angle B + \angle C = 180°$ (तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंत:कोण)

परंतु यह दिया गया है कि

$\angle B : \angle C = 1 : 2$

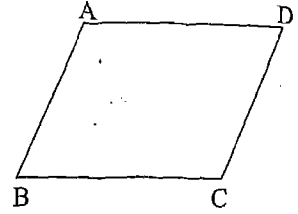
मान लिजिए $\angle B = x$ है। इसलिए, $\angle C = 2x$ है।

अत:, $x + 2x = 180°$

इसलिए, $\angle B = x = \frac{1}{3} \times 180° = 60°$

तथा $\angle C = 2x = \frac{2}{3} \times 180° = 120°$

आकृति 10.12

अत:, $\angle D = \angle B = 60°$ तथा $\angle A = \angle C = 120°$ (समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं)

प्रश्नावली 10.2

1. किसी समांतर चतुर्भुज की दो आसन्न भुजाएँ 4 cm और 3 cm हैं। उसका परिमाप ज्ञात कीजिए।

2. किसी समांतर चतुर्भुज के एक कोण का माप 70° है। उसके अन्य कोणों के माप ज्ञात कीजिए।

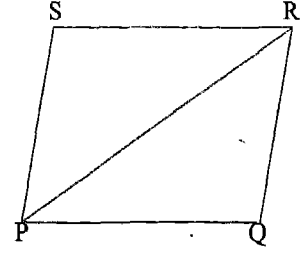
3. किसी समांतर चतुर्भुज के दो आसन्न कोण बराबर हैं। इस समांतर चतुर्भुज के प्रत्येक कोण का माप ज्ञात कीजिए।

4. किसी समांतर चतुर्भुज की दो भुजाओं का अनुपात 3:5 है तथा उसका परिमाप 48 cm है। इस समांतर चतुर्भुज की भुजाएँ ज्ञात कीजिए।

   [*संकेत:* मान लीजिए दो भुजाएँ $3x$ और $5x$ हैं।]

5. किसी समांतर चतुर्भुज के दो आसन्न कोणों का अनुपात 2:3 है। उसके सभी कोण ज्ञात कीजिए।

6. किसी समांतर चतुर्भुज का परिमाप 150 cm है। इसकी एक भुजा अन्य भुजा से 25 cm बड़ी है। इस समांतर चतुर्भुज की सभी भुजाओं की लंबाइयाँ ज्ञात कीजिए।

7. PR समांतर चतुर्भुज PQRS का एक विकर्ण है (आकृति 10.13)।

   (i) क्या PS = RQ है? क्यों?

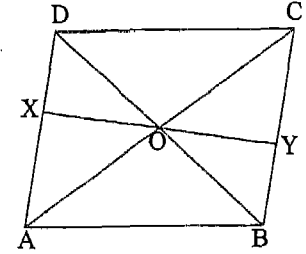
   (ii) क्या SR = PQ है? क्यों?

   (iii) क्या PR = RP है? क्यों?

   (iv) क्या Δ PSR $\cong$ Δ RQP है? क्यों?

आकृति 10.13

8. किसी चतुर्भुज के विकर्णों का प्रतिच्छेद बिंदु एक विकर्ण को 2:3 के अनुपात में विभाजित करता है। क्या यह चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज हो सकता है? क्यों?

9. समांतर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं (आकृति 10.14)। XY एक ऐसा रेखाखंड है जो O से होकर जाता है तथा X भुजा AD पर स्थित है और Y भुजा BC पर है। निम्न कथनों में से प्रत्येक के लिए कारण दीजिए :

   (i) OB = OD

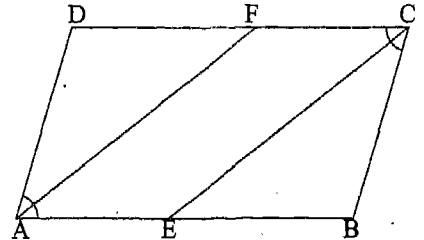
   (ii) $\angle$ OBY = $\angle$ ODX

   (iii) $\angle$ BOY = $\angle$ DOX

   (iv) Δ BOY $\cong$ Δ DOX

   अब बताइए कि XY बिंदु O पर समद्विभाजित होता है या नहीं।

आकृति 10.14

10. आकृति 10.15 में, ABCD एक समांतर चतुर्भुज है, CE कोण C को समद्विभाजित करती है तथा AF कोण A को समद्विभाजित करती है। निम्न कथनों में से प्रत्येक के लिए कारण दीजिए :

    (i) $\angle$ BAD = $\angle$ BCD

    (ii) $\angle FAB = \frac{1}{2} \angle BAD$

    (iii) $\angle DCE = \frac{1}{2} \angle BCD$

    (iv) $\angle$ FAB = $\angle$ DCE

    (v) $\angle$ DCE = $\angle$ CEB

    (vi) $\angle$ CEB = $\angle$ FAB

आकृति 10.15

(vii) CE || FA

(viii) AE || FC

(ix) AECF एक समांतर चतुर्भुज है।

10.5 समचतुर्भुज के गुण

याद कीजिए कि समचतुर्भुज एक ऐसा समांतर चतुर्भुज होता है जिसकी आसन्न भुजाओं के एक युग्म की भुजाएँ बराबर होती हैं। आकृति 10.16 में, ABCD एक समचतुर्भुज, अर्थात् ऐसा समांतर चतुर्भुज है जिसमें AB = AD है।

आकृति 10.16

अब समांतर चतुर्भुज के गुणों से, हमें ज्ञात है कि

(i) AB = DC और AD = BC,

(ii) $\angle$ A = $\angle$ C और $\angle$ B = $\angle$ D है।

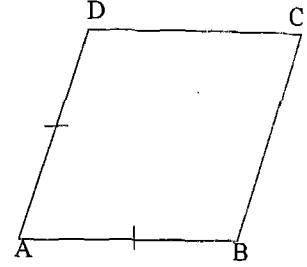
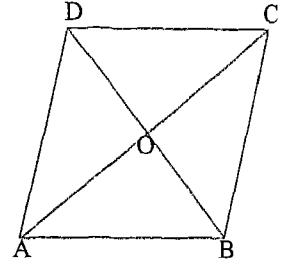
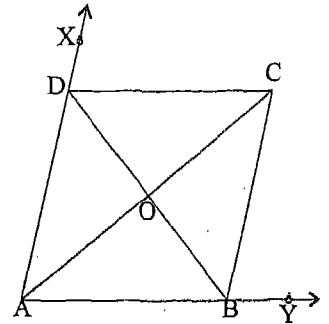
चूँकि AB = AD है, इसलिए उपर्युक्त (i) से, हम सरलता से निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि AB = BC = CD = AD है। दूसरे शब्दों में, *समचतुर्भुज की सभी भुजाएँ बराबर होती हैं।*

अब मान लीजिए कि O एक समचतुर्भुज ABCD के विकर्णों AC और BD का प्रतिच्छेद बिंदु है (आकृति 10.17)। समांतर चतुर्भुज के गुणों से, हम जानते हैं :

OA = OC और OB = OD

आकृति 10.17

विकर्णों AC और BD द्वारा अपने प्रतिच्छेद बिंदु O पर बनाए गए कोणों के बारे में आप क्या कह सकते हैं? इस प्रश्न का उत्तर प्राप्त करने के लिए, आइए निम्नलिखित क्रियाकलाप करें :

क्रियाकलाप 5 : $\angle$XAY खींचिए। इसकी भुजाओं AX और AY में से क्रमश: रेखाखंड AD और AB इस प्रकार काटिए कि AD = AB हो। D से होकर, एक रेखा AB के समांतर खींचिए तथा B से होकर, एक रेखा AD के समांतर खींचिए जो एक-दूसरे को C पर प्रतिच्छेद करे (आकृति 10.18)। स्पष्ट है कि हमें एक ऐसा समांतर चतुर्भुज ABCD प्राप्त हो गया है, जिसमें AB = AD है। अर्थात् हमें एक समचतुर्भुज ABCD प्राप्त

आकृति 10.18

हो गया है। AC और BD को मिलाइए और उनके प्रतिच्छेद बिंदु को O मानिए। $\angle$ DAB और AB के भिन्न-भिन्न मान लेकर, इसी प्रकार दो अन्य समचतुर्भुज खींचिए। इन समचतुर्भुजों को भी ABCD से नामांकित कीजिए। पहले की तरह, विकर्णों AC और BD के प्रतिच्छेद बिंदु को O से नामांकित कीजिए। समचतुर्भुजों को 1, 2 और 3 से क्रमांकित कीजिए।

प्रत्येक स्थिति में, $\angle$BOC और $\angle$COD को मापिए तथा अंतरों $90° - \angle BOC$ और $90° - \angle COD$ को ज्ञात कीजिए। अपने प्रेक्षणों को नीचे दर्शाए अनुसार एक सारणी के रूप में लिखिए :

समचतुर्भुज	$\angle$ BOC	$90° - \angle$ BOC	$\angle$ COD	$90° - \angle$ COD
1				
2				
3				

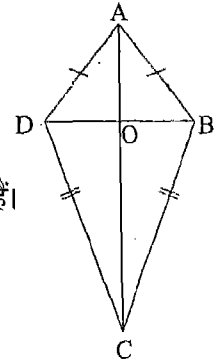
आप क्या देखते हैं? आप देखेंगे कि प्रत्येक स्थिति में अंतर $90° - \angle BOC$ और $90° - \angle COD$ या तो शून्य हैं या इतने कम हैं कि इन्हें छोड़ा जा सकता है। इस प्रकार,

$\angle BOC = \angle COD = 90°$ है।

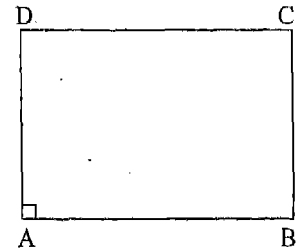
अतः, $\angle DOA = \angle BOA = 90°$ (शीर्षाभिमुख कोणों के गुण से)

इस क्रियाकलाप से निम्न गुण प्रदर्शित होता है :

समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

टिप्पणी : याद कीजिए कि वह चतुर्भुज ABCD जिसमें AB = AD और BC = DC हो, एक पतंग कहलाता है (आकृति 10.19)। यहाँ आप देख सकते हैं :
$AC \perp BD$ और $OB = OD$ परंतु $OA \neq OC$

आकृति 10.19

10.6 आयत के गुण

याद कीजिए कि आयत एक ऐसा समांतर चतुर्भुज होता है, जिसको एक कोण समकोण हो। आकृति 10.20 में, ABCD एक आयत है, अर्थात् एक समांतर चतुर्भुज है जिसमें $\angle A = 90°$ है। चूँकि ABCD एक समांतर चतुर्भुज है, इसलिए :

आकृति 10.20

$AB = DC, AD = BC,$

$\angle A = \angle C$ और $\angle B = \angle D$

अब AB ॥ DC तथा AD इनके लिए एक तिर्यक रेखा है।

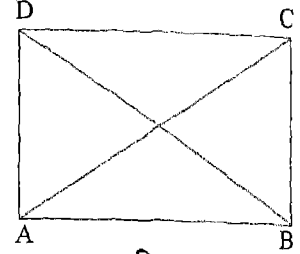
अत:, $\angle A + \angle D = 180°$ (तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंत:कोण)

परंतु $\angle A = 90°$ है।

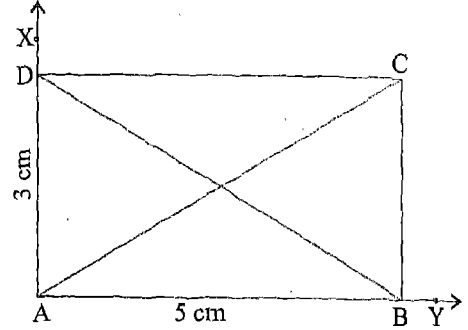
अत:, $\angle D = 90°$ हुआ।

अत:, $\angle B = 90°$ और $\angle C = 90°$

($\angle B = \angle D$ और $\angle A = \angle C$)

अत:, *आयत का प्रत्येक कोण समकोण होता है।*

आकृति 10.21

आइए, अब आयत के विकर्णों AC और BD पर विचार करें (आकृति 10.21)। ये समान लंबाई के प्रतीत होते हैं। आइए, इसकी जाँच करें।

क्रियाकलाप 6 : एक समकोण ∠XAY खींचिए तथा इसकी भुजाओं AX और AY में से क्रमश: मान लीजिए, AD = 3 cm और AB = 5 cm काट लीजिए। बिंदुओं D और B से होकर, क्रमश: AB और AD के समांतर रेखाएँ खींचिए जो C पर प्रतिच्छेद करती हैं (आकृति 10.22)। हमें एक आयत ABCD प्राप्त हो जाता है। AC और BD को मिलाइए।

आकृति 10.22

AB और AD की भिन्न-भिन्न लंबाइयाँ लेकर दो और आयत खींचिए। इन आयतों को भी ABCD से नामांकित कीजिए तथा इनके विकर्ण AC और BD खींचिए। इन आयतों को 1, 2 और 3 से क्रमांकित कीजिए।

प्रत्येक स्थिति में, AC और BD को मापिए तथा अंतर AC – BD ज्ञात कीजिए। अपने प्रेक्षणों को नीचे दी हुई एक सारणी के रूप में लिखिए :

आयत	*विकर्ण* AC	*विकर्ण* BD	AC – BD
1			
2			
3			

आप क्या देखतें हैं? आप देखेंगे कि प्रत्येक स्थिति में, अंतर $AC - BD$ या तो शून्य है या इतना कम है कि इसे छोड़ा जा सकता है। इस प्रकार, $AC = BD$ है।

इस क्रियाकलाप से निम्न गुण प्रदर्शित होता है :

आयत के विकर्ण बराबर होते हैं।

10.7 वर्ग के गुण

आकृति 10.23

याद कीजिए कि वह समांतर चतुर्भुज जिसमें आसन्न भुजाओं के एक युग्म की भुजाएँ बराबर हों तथा एक कोण समकोण हो वर्ग कहलाता है।

आकृति 10.23 में, ABCD एक वर्ग है, अर्थात् एक समांतर चतुर्भुज है, जिसमें $AB = AD$ तथा $\angle A = 90°$ है।

अब ABCD एक समांतर चतुर्भुज है, जिसमें $AB = AD$ है। इसलिए ABCD एक **समचतुर्भुज है।**

अतः इसमें $AB = BC = DC = AD$, $AC \perp BD$, $OA = OC$ और $OB = OD$ है (आकृति 10.24)।

आकृति 10.24

साथ ही, ABCD एक समांतर चतुर्भुज है जिसमें $\angle A = 90°$ है।

इसलिए, यह एक आयत हुआ।

अतः, $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$ और $AC = BD$ होगा।

सारांश रूप में, एक वर्ग में,

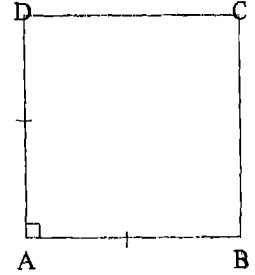
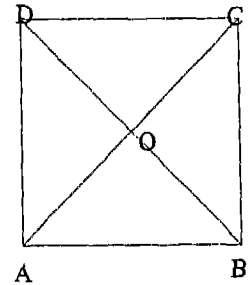
(i) सभी भुजाएँ समान (बराबर) लंबाई की होती हैं,

(ii) सभी कोण समकोण होते हैं,

(iii) विकर्ण बराबर लंबाई के होते हैं तथा

(iv) विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

उपर्युक्त गुणों को स्पष्ट करने के लिए अब हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 3 : किसी समचतुर्भुज के विकर्णों AC और BD की लंबाइयाँ क्रमशः 6 cm और 8 cm हैं। इस समचतुर्भुज की प्रत्येक भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए समचतुर्भुज के विकर्ण AC और BD एक-दूसरे को बिंदु O पर समद्विभाजित करते हैं (आकृति 10.25)।
अब AC = 6 cm और BD = 8 cm है।

अतः, $OA = \frac{1}{2} AC = \frac{6}{2}$ cm = 3 cm है तथा

$OB = \frac{1}{2} BD = \frac{8}{2}$ cm = 4 cm है (विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं)

अब $\angle AOB = 90°$ (समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लंब होते हैं)

आकृति 10.25

इसलिए, $AB^2 = OA^2 + OB^2$ (पाइथागोरस प्रमेय)

$= 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$

या $AB = \sqrt{25} = 5$

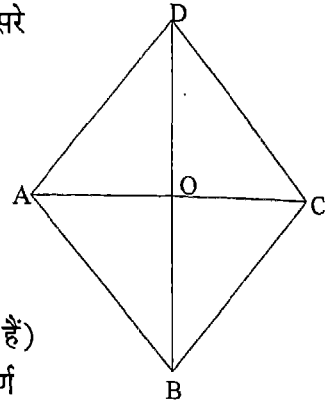
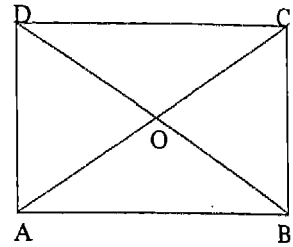
अतः, समचतुर्भुज की प्रत्येक भुजा की लंबाई 5 cm है।

उदाहरण 4 : आयत ABCD के विकर्ण AC और BD एक-दूसरे को बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं (आकृति 10.26)। यदि OA = 5 cm है, तो AC और BD ज्ञात कीजिए।

आकृति 10.26

हल : OA = 5 cm अतः AC = 2OA = 2 × 5 cm = 10 cm (विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं)

साथ ही, AC = BD (आयत के विकर्ण बराबर होते हैं)

अतः, BD = 10 cm है।

प्रश्नावली 10.3

1. समचतुर्भुज के लिए, निम्न में से कौन-से कथन सत्य हैं?
   (i) इसमें समांतर रेखाओं के दो युग्म हैं।
   (ii) इसमें बराबर कोणों के दो युग्म हैं।
   (iii) इसमें बराबर भुजाओं के केवल दो युग्म हैं।
   (iv) इसके दो कोण समकोण हैं।

(v) इसके विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

(vi) इसके विकर्ण बराबर हैं और परस्पर लंब है।

(vii) इसकी सभी भुजाएँ बराबर लंबाई की हैं।

2. आयत के लिए, निम्न में से कौन-से कथन सत्य हैं?

(i) इसमें बराबर लंबाई वाली सम्मुख भुजाओं के दो युग्म हैं।

(ii) इसकी सभी भुजाएँ बराबर लंबाई की हैं।

(iii) इसके विकर्ण बराबर हैं।

(iv) इसके विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।

(v) इसके विकर्ण परस्पर लंब हैं।

(vi) इसके विकर्ण बराबर हैं और परस्पर लंब हैं।

(vii) इसके विकर्ण परस्पर लंब हैं और समद्विभाजित करते हैं।

(viii) इसके विकर्ण बराबर हैं और परस्पर समद्विभाजित करते हैं।

(ix) इसके विकर्ण बराबर हैं, परस्पर लंब हैं और समद्विभाजित करते हैं।

(x) इसके सभी कोण बराबर हैं।

3. उपर्युक्त प्रश्न 2 में आयत के स्थान पर वर्ग लेकर उन्हीं प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

4. एक समांतर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लंब नहीं हैं। क्या यह एक समचतुर्भुज है? क्यों?

5. AC एक आयत ABCD का विकर्ण है।

(i) क्या $BC = DA$ है? क्यों

(ii) क्या $AB = CD$ है? क्यों

(iii) क्या $\angle B = \angle D$ है? क्यों

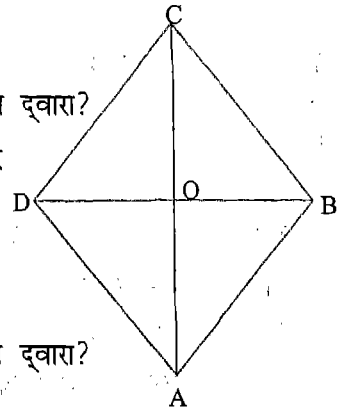
(iv) क्या $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ है? किस सर्वांगसमता प्रतिबंध द्वारा?

6. ABCD एक समचतुर्भुज है और इसके विकर्ण परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं (आकृति 10.27)।

(i) क्या $OB = OD$ है? क्यों?

(ii) क्या $BC = DC$ है? क्यों?

(iii) क्या $\Delta BOC \cong \Delta DOC$ है? किस सर्वांगसमता प्रतिबंध द्वारा?

(iv) क्या $\angle BCO = \angle DCO$ है? क्यों?

आकृति 10.27

(v) क्या Δ BAO $\cong$ Δ DAO है? किस सर्वांगसमता प्रतिबंध द्वारा?

(vi) क्या $\angle$ BAO = $\angle$ DAO है? क्यों?

(vii) क्या समचतुर्भुज का विकर्ण AC कोण A और C को समद्विभाजित करता है? क्यों?

7. समचतुर्भुज ABCD का विकर्ण AC उसकी भुजा BC के बराबर है (आकृति 10.28)। इस समचतुर्भुज के सभी कोण ज्ञात कीजिए।

आकृति 10.28

8. चतुर्भुज के आकार की एक खिड़की के फ्रेम (frame) का एक विकर्ण दूसरे विकर्ण से अधिक लंबा है। क्या यह फ्रेम आयत के आकार का है? क्यों?

9. आकृति 10.29 में, ABCD एक आयत है। क्रमश: शीर्षों B और D से विकर्ण AC पर दो लंब BM और DN हैं।

आकृति 10.29

(i) क्या AB = CD है? क्यों?

(ii) क्या $\angle$ BMA = $\angle$ DNC है? क्यों?

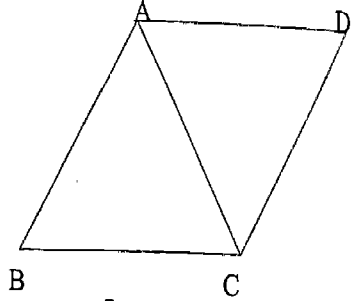
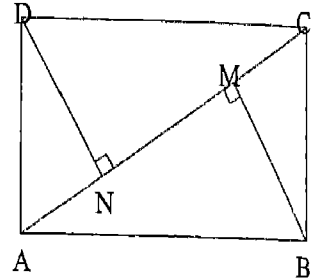
(iii) क्या $\angle$ BAM = $\angle$ DCN है? क्यों?

(iv) क्या Δ BMA $\cong$ Δ DNC है? किस सर्वांगसमता प्रतिबंध द्वारा?

(v) क्या BM = DN है? क्यों?

10. किसी चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लंब हैं। क्या यह चतुर्भुज सदैव एक समचतुर्भुज है? यदि आपका उत्तर *'नहीं'* है, तो एक आकृति खींचकर अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

11. किसी समचतुर्भुज के विकर्ण बराबर हैं। क्या यह समचतुर्भुज एक वर्ग भी है?

12. किसी चतुर्भुज के विकर्ण बराबर हैं। क्या यह चतुर्भुज सदैव एक आयत है? यदि आपका उत्तर *'नहीं'* है? तो एक आकृति खींचकर अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

याद रखने योग्य बातें

1. एक चतुर्भुज जिसके दो सम्मुख भुजाएँ समांतर हों, समलंब कहलाता है।
2. वह चतुर्भुज जिसमें सम्मुख भुजाओं के दोनों युग्मों की भुजाएँ समांतर हों, समांतर चतुर्भुज कहलाता है।
3. वह समांतर चतुर्भुज जिसमें आसन्न भुजाओं के एक युग्म की भुजाएँ बराबर हों, समचतुर्भुज कहलाता है। वास्तव में, समचतुर्भुज की सभी भुजाएँ बराबर होती हैं।
4. वह समांतर चतुर्भुज जिसमें एक कोण समकोण हो, आयत कहलाता है। वास्तव में, आयत के सभी कोण समकोण होते हैं।
5. वह समांतर चतुर्भुज जिसमें आसन्न भुजाओं के एक युग्म की भुजाएँ बराबर हों तथा एक कोण समकोण हों, वर्ग कहलाता है। वास्तव में, वर्ग की सभी भुजाएँ बराबर होती हैं तथा सभी कोण समकोण होते हैं।
6. एक समांतर चतुर्भुज में,
   (i) सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं,
   (ii) सम्मुख कोण बराबर होते हैं तथा
   (iii) विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।
7. समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।
8. आयत के विकर्ण बराबर होते हैं तथा परस्पर समद्विभाजित करते हैं।
9. वर्ग के विकर्ण बराबर होते हैं तथा परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

अध्याय

11

चतुर्भुजों की रचना

11.1 भूमिका

कक्षा VII में आप चतुर्भुजों के बारे में पढ़ चुके हैं। पिछले अध्याय में आप विशेष प्रकार के चतुर्भुजों एवं उनके गुणों के बारे में अध्ययन कर चुके हैं। इस अध्याय में हम कुछ दिए हुए माप के चतुर्भुजों की रचना करना सीखेंगे। आपको याद होगा कि कक्षा VII में आप निम्नलिखित सरल स्थितियों में त्रिभुजों की रचना करना सीख चुके हैं :

(i) जब उसकी दो भुजाएँ और उनके अंतर्गत कोण दिया हो।

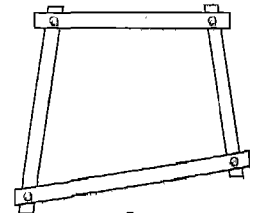
(ii) जब उसके दो कोण और उनकी अंतर्गत भुजा दी हुई हो।

(iii) जब उसकी सभी तीन भुजाएँ दी हुई हों।

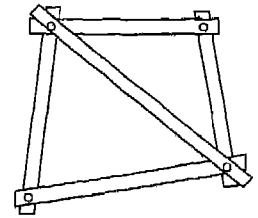
(iv) जब त्रिभुज समकोण त्रिभुज हो तथा कर्ण और एक भुजा दी हुई हो।

ध्यान दीजिए कि उपर्युक्त स्थितियों में से प्रत्येक स्थिति में, एक त्रिभुज के तीन विशिष्ट भागों के माप, उस त्रिभुज की रचना करने के लिए पर्याप्त थे। साथ ही, एक ही मापों से खींचे गए दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं, अर्थात् एक-दूसरे की कार्बन प्रतिलिपि होते हैं। दूसरे शब्दों में, किसी त्रिभुज के तीन उपयुक्त माप दिए हों, तो त्रिभुज की रचना अद्‌वितीय रूप से की जा सकती है।

एक चतुर्भुज की अद्‌वितीय रूप से रचना करने के लिए, हमें कितने मापों की आवश्यकता है? हम कल्पना कर सकते हैं कि चतुर्भुज के चार भागों की जानकारी होने पर हम उसकी रचना अद्‌वितीय रूप से कर सकते हैं। परंतु यह सत्य नहीं है। हम इसे एक क्रियाकलाप द्‌वारा स्पष्ट करते हैं :

क्रियाकलाप : उपर्युक्त लंबाइयों वाली गत्ते की चार पट्‌टियाँ लीजिए, जिनके सिरों पर छेद हुए हों। इन पट्‌टियों को सिरों पर जोड़कर एक चतुर्भुज बनाइए; जैसा कि आकृति 11.1 में दर्शाया

आकृति 11.1

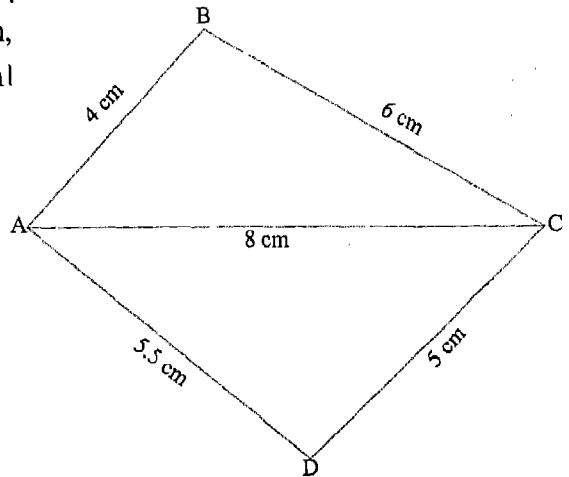
गया है। अब दो सम्मुख कोनो (शीर्षों) को दबाकर इस चतुर्भुज के आकार को बदलने का प्रयत्न कीजिए। आप देखेंगे कि आप सरलता से इस आकार को बदलकर एक अन्य चतुर्भुज प्राप्त कर सकते हैं। इस प्रकार, चार भुजाओं की मापों से दो भिन्न चतुर्भुज बनाए जा सकते हैं। दूसरे शब्दों में, यदि चार भुजाओं की मापों से हम एक चतुर्भुज बना भी लें, तो भी यह चतुर्भुज अद्‌वितीय नहीं होगा।

अब एक और पट्‌टी लीजिए तथा इसे पहले बनाए गए चतुर्भुज में एक विकर्ण की तरह जोड़िए, जैसा कि आकृति 11.2 में दिखाया गया है। अब इस चतुर्भुज का आकार बदलने का प्रयत्न कीजिए। आप क्या देखते हैं? अब आप ऐसा करने में समर्थ नहीं हो पाएँगे। इससे यह प्रदर्शित होता है कि एक चतुर्भुज की अद्‌वितीय रूप से रचना करने के लिए कम से कम उसके पाँच भागों (इस स्थिति में चार भुजाएँ और एक विकर्ण) की आवश्यकता होती है। इस अध्याय में हम कुछ सरल स्थितियों में चतुर्भुजों की रचना करेंगे। निस्संदेह, प्रत्येक स्थिति में, हमें चतुर्भुज के पाँच विशिष्ट भागों के मापों की आवश्यकता होगी। हम इन रचनाओं को विशिष्ट उदाहरणों की सहायता से स्पष्ट करेंगे।

आकृति 11.2

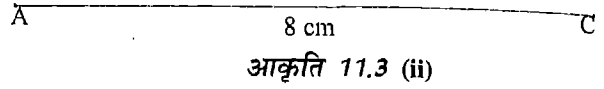
11.2 चतुर्भुज की रचना जब उसका एक विकर्ण और चारों भुजाएँ दी हुई हों

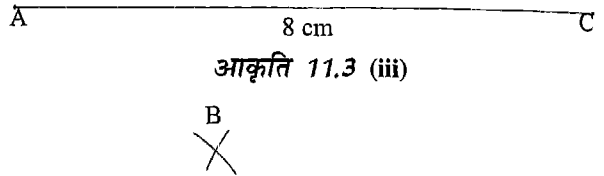
दिया है : चतुर्भुज ABCD की चार भुजाएँ AB = 4 cm, BC = 6 cm, CD = 5 cm, AD = 5.5cm और एक विकर्ण AC = 8 cm।

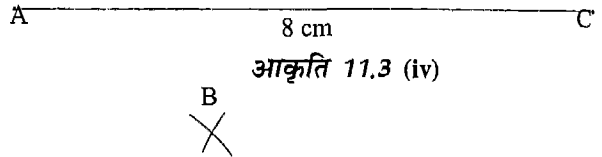
रचना करनी है : उपर्युक्त चार भुजाओं और एक विकर्ण वाले चतुर्भुज की।

पहले हम हाथ से चतुर्भुज ABCD की एक अनुमानित आकृति (rough figure) बनाते हैं तथा चारों भुजाओं और एक विकर्ण की मापों को दर्शाते हैं [आकृति 11.3 (i)]।

आकृति 11.3 (i)

रचना के चरण :

1. AC = 8 cm खींचिए [आकृति 11.3 (ii)]।

आकृति 11.3 (ii)

2. A को केंद्र मानकर और AB (= 4 cm) त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए [आकृति 11.3 (iii)]

आकृति 11.3 (iii)

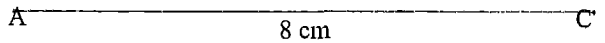
3. C को केंद्र मानकर और BC (= 6 cm) त्रिज्या लेकर एक अन्य चाप खींचिए जो चरण 2 वाले चाप को B पर प्रतिच्छेद करे [आकृति 11.3 (iv)]।

आकृति 11.3 (iv)

4. A को केंद्र मानकर और AD (= 5.5 cm) त्रिज्या लेकर एक चाप इस प्रकार खींचिए कि यह चाप और बिंदु B, AC के विपरीत ओर स्थित हों [आकृति 11.3 (v)] ।

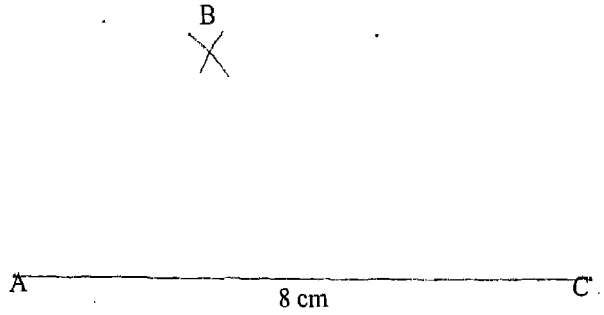
B

A

8 cm

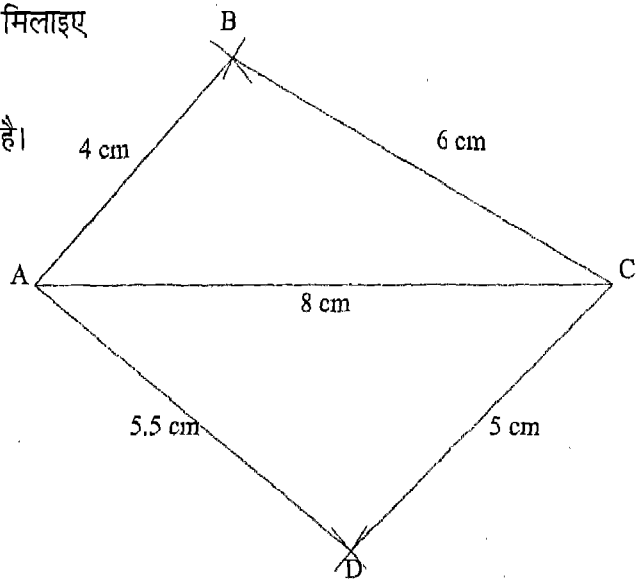
C

आकृति 11.3 (v)

5. C को केंद्र मानकर और CD (= 5 cm) त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए जो चरण 4 वाले चाप को बिंदु D पर प्रतिच्छेद करे [आकृति 11.3 (vi)]।

D

आकृति 11.3 (vi)

6. AB, BC, AD और CD को मिलाइए [आकृति 11.3 (vii)]।

तब, ABCD वांछित चतुर्भुज है।

B
4 cm
6 cm
A
C
8 cm
5.5 cm
5 cm
D

आकृति 11.3 (vii)

टिप्पणी : चतुर्भुज की अनुमानित आकृति खींचकर और उसकी भुजाओं और विकर्ण की मापों को दर्शाने से, रचना के लिए अपनाए जाने वाले चरणों का सुझाव मिलता है। स्पष्ट है कि माप ऐसे होने चाहिए कि त्रिभुज की दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से अधिक हो। उदाहरणार्थ, AB + BC > AC तथा AD + DC > AC अवश्य ही सत्य होना चाहिए। (क्यों?)

उदाहरणार्थ, यदि AB = 5 cm, BC = 3.5 cm, CD = 5 cm, DA = 3 cm तथा AC = 8.5 cm हो, तो चतुर्भुज ABCD की रचना करना संभव नहीं है। यह इस कारण कि AD + CD (3 cm + 5 cm) < AC (8.5 cm) है।

प्रश्नावली 11.1

1. एक चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए, जिसमें AB = 4.5 cm, BC = 4 cm, CD = 6.5 cm, DA = 3 cm और BD = 6.5 cm है।
2. एक चतुर्भुज PQRS की रचना कीजिए, जिसमें PQ = 3 cm, QR = 5 cm, QS = 5 cm, PS = 4 cm और SR = 4 cm है।
3. भुजा 4.5 cm और एक विकर्ण 6 cm वाले एक समचतुर्भुज की रचना कीजिए।
4. एक समांतर चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए, जिसमें AB = 3.5 cm, BC = 4 cm और AC = 6.5 cm है।
5. क्या ऐसे चतुर्भुज ABCD की रचना करना संभव है, जिसमें AB = 3 cm, BC = 4 cm, CD = 5.5 cm, DA = 6 cm और BD = 9 cm है? यदि नहीं, तो कारण दीजिए।
6. एक चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए, जिसमें AB = 5 cm, BC = 4 cm, AD = 3 cm, CD = 6 cm और BD = 5 cm है।

11.3 चतुर्भुज की रचना जब उसकी तीन भुजाएँ और दोनों विकर्ण दिए गए हैं

दिया है : चतुर्भुज ABCD की तीन भुजाएँ BC = 4.5 cm, AD = 5.5 cm, CD = 5 cm और दोनों विकर्ण AC = 5.5 cm एवं BD = 7 cm ।

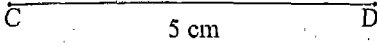
रचना करनी है : इन तीनों भुजाओं और दोनों विकर्णों वाले चतुर्भुज की।

पहले हम चतुर्भुज ABCD की एक अनुमानित आकृति बनाते हैं और तीनों भुजाओं एवं दोनों विकर्णों की मापों को दर्शाते हैं [आकृति 11.4 (i)] ।

आकृति 11.4 (i)

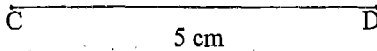
रचना के चरण:

1. CD = 5 cm खींचिए [आकृति 11.4 (ii)] ।

C 5 cm D

आकृति 11.4 (ii)

2. C को केंद्र मानकर और CB (= 4.5 cm) त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए [आकृति 11.4 (iii)]।

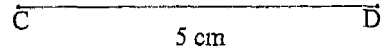
B

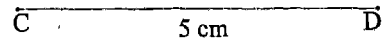
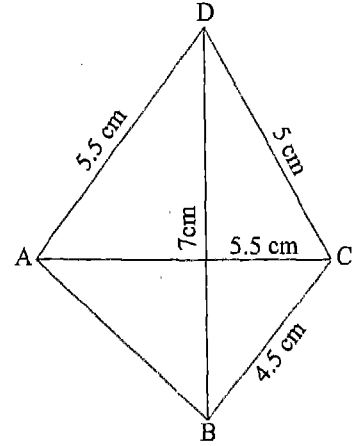
C 5 cm D

आकृति 11.4 (iii)

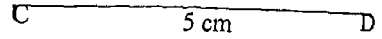
3. D को केंद्र मानकर और BD (= 7 cm) त्रिज्या लेकर एक अन्य चाप खींचिए जो चरण 2 के चाप को B पर काटे [आकृति 11.4 (iv)] ।

C 5 cm D

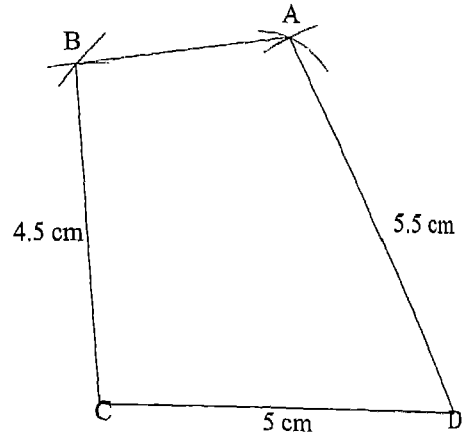
आकृति 11.4 (iv)

B

4. C को केंद्र मानकर और AC (= 5.5 cm) त्रिज्या लेकर एक चाप CD के उसी ओर खींचिए जिस ओर B है [आकृति 11.4 (v)] ।

C 5 cm D

आकृति 11.4 (v)

5. D को केंद्र मानकर और AD (= 5.5 cm) त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए जो चरण 4 वाले चाप को A पर काटे [आकृति 11.4 (vi)] ।

आकृति 11.4 (vi)

6. DA, AB और BC को मिलाइए [आकृति 11.4 (vii)] ।

तब, ABCD वांछित चतुर्भुज है।

आकृति 11.4 (vii)

टिप्पणी : 1. चतुर्भुज ABCD की अनुमानित आकृति बनाने और विभिन्न मापों को दर्शाने से हम देखते हैं कि Δ ADC और Δ BDC की रचना के लिए सभी माप ज्ञात हैं और इनमें CD एक उभयनिष्ठ भुजा है। इससे रचना के चरणों का सुझाव मिलता है। स्पष्ट है कि ये लंबाइया ऐसी होनी चाहिए कि $CB + BD > CD$ और $CA + AD > CD$ हो। (क्यों?)

2. विकर्णों को दिखाना आवश्यक नहीं है। वांछित आकृति चतुर्भुज ABCD है, जिसमें केवल चार रेखाखंड AB, BC, CD और DA सम्मिलित हैं।

प्रश्नावली 11.2

1. एक चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए, जिसमें AB = 4 cm, BC = 3 cm, AD = 2.5 cm, AC = 4.5 cm और BD = 4 cm है।
2. एक चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए, जिसमें BC = 7.5 cm, AC = AD = 6 cm, CD = 5 cm और BD = 10 cm है।
3. क्या चतुर्भुज ABCD की रचना करना संभव है, जिसमें AB = 3 cm, CD = 3 cm, DA = 7.5 cm, AC = 8 cm औरं BD = 4 cm है? यदि नहीं, तो कारण दीजिए।
4. एक चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए, जिसमें AB = 7 cm, AD = 6 cm, AC = 7 cm, BD = 7.5 cm और BC = 4 cm है।
5. एक चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए, जिसमें AB = AD = 3 cm, BC = 2.5 cm, AC = 4 cm और BD = 5 cm है।
6. एक चतुर्भुज PQRS की रचना कीजिए, जिसमें QR = 7.5 cm, RP = PS = 6 cm, RS = 5 cm और QS = 10 cm है।

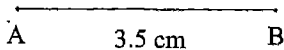
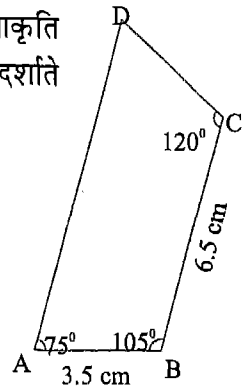
11.4 दो आसन्न भुजाएँ और तीन कोण दिए होने पर चतुर्भुज की रचना

दिया है : चतुर्भुज ABCD की दो आसन्न भुजाएँ AB = 3.5 cm, BC = 6.5 cm तथा तीन कोण $\angle A = 75°$, $\angle B = 105°$ और $\angle C = 120°$ है।

रचना करनी है : इन दो आसन्न भुजाओं और तीन कोणों वाले चतुर्भुज की।

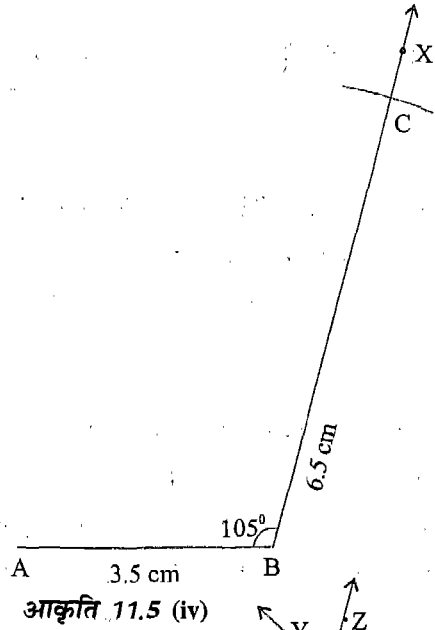
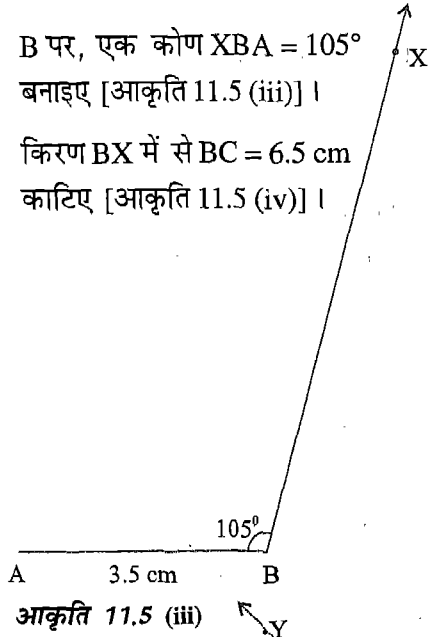
पहले हम हाथ से चतुर्भुज ABCD की एक अनुमानित आकृति बनाते हैं तथा दोनों आसन्न भुजाओं और तीनों कोणों की मापों को दर्शाते हैं [आकृति 11.5 (i)]।

रचना के चरण :

1. AB = 3.5 cm खींचिए [आकृति 11.5 (ii)] ।

***आकृति 11.5* (ii)**

***आकृति 11.5* (i)**

2. B पर, एक कोण XBA = 105° बनाइए [आकृति 11.5 (iii)] ।

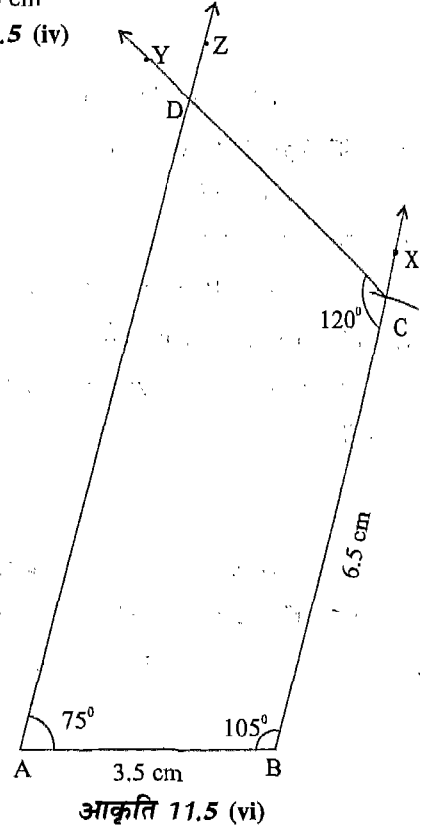
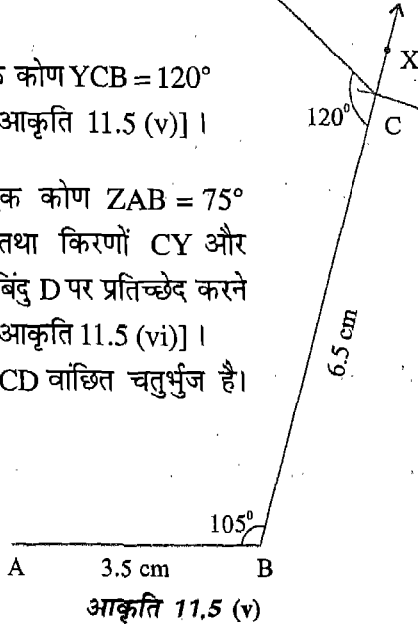
3. किरण BX में से BC = 6.5 cm काटिए [आकृति 11.5 (iv)] ।

आकृति 11.5 (iii)

आकृति 11.5 (iv)

4. C पर, एक कोण YCB = 120° बनाइए [आकृति 11.5 (v)] ।

5. A पर, एक कोण ZAB = 75° बनाइए तथा किरणों CY और AZ को बिंदु D पर प्रतिच्छेद करने दीजिए [आकृति 11.5 (vi)] ।
तब, ABCD वांछित चतुर्भुज है।

आकृति 11.5 (v)

आकृति 11.5 (vi)

टिप्पणी : हम जानते हैं कि एक चतुर्भुज के चारों कोणों का योग 360^0 होता है। अत:, चतुर्भुज की संभव रचना के लिए उसके तीन कोणों (यहाँ $\angle A$, $\angle B$ और $\angle C$) का योग $360°$ से कम होना चाहिए।

उदाहरणार्थ, उस चतुर्भुज ABCD की रचना करना संभव नहीं है जिसमें $BC = 9.5$ cm, $\angle A = 75°$, $\angle B = 150°$, $AB = 6$ cm और $\angle C = 140°$ है। इसका कारण है कि यहाँ $\angle A + \angle B + \angle C\ (= 75° + 150° + 140°) > 360°$ है।

प्रश्नावली 11.3

1. एक चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए, जिसमें $AB = 5.5$ cm, $BC = 4$ cm, $\angle A = 60°$, $\angle B = 105°$ और $\angle C = 105°$ है।
2. एक चतुर्भुज PQRS की रचना कीजिए, जिसमें $PQ = 3.5$ cm, $QR = 6.5$ cm, $\angle P = 100°$, $\angle R = 110°$ और $\angle S = 75°$ है। [*संकेत:* $\angle Q = 360° - (100° + 110° + 75°)$]
3. एक चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए, जिसमें $AB = 6$ cm, $BC = 5$ cm, $\angle A = 55°$, $\angle B = 110°$ और $\angle D = 90°$ है।
4. एक चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए, जिसमें $BC = 5.5$ cm, $CD = 4$ cm, $\angle A = 70°$, $\angle B = 110°$ और $\angle D = 85°$ है।
5. क्या उस चतुर्भुज ABCD की रचना करना संभव है, जिसमें $AB = 5$ cm, $BC = 7.5$ cm, $\angle A = 80°$, $\angle B = 140°$ और $\angle C = 145°$ है? यदि नहीं, तो कारण दीजिए।
6. 4.5 cm और 6 cm भुजाओं वाले आयत की रचना कीजिए।
7. एक समांतर चतुर्भुज की रचना कीजिए, जिसकी दो भुजाएँ और कोण क्रमश: 4 cm, 5.5 cm और 70° हैं।

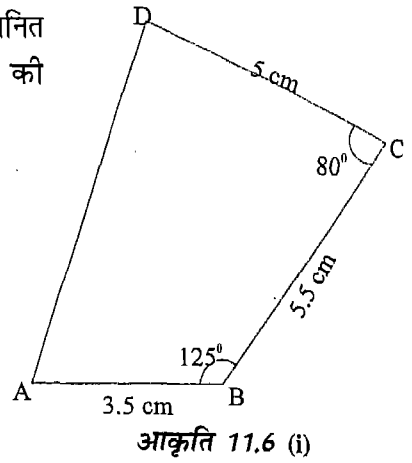
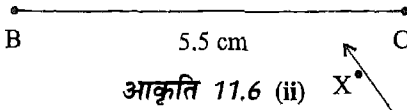
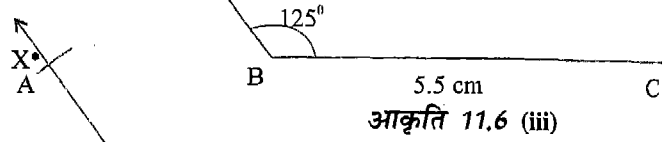
11.5 चतुर्भुज की रचना जब तीन भुजाएँ और दो अंतर्गत कोण दिए गए हों

दिया है : चतुर्भुज ABCD की तीन भुजाएँ $AB = 3.5$ cm, $BC = 5.5$ cm, $CD = 5$ cm तथा उनके दो अंतर्गत कोण $\angle B = 125°$ और $\angle C = 80°$ ।

रचना करनी है : इन तीनों भुजाओं और दो अंतर्गत कोणों वाले चतुर्भुज की।

पहले हम हाथ से चतुर्भुज ABCD की एक अनुमानित आकृति बनाते हैं तथा तीनों भुजाओं और अंतर्गत कोणों की मापों को दर्शाते हैं [आकृति 11.6 (i)]।

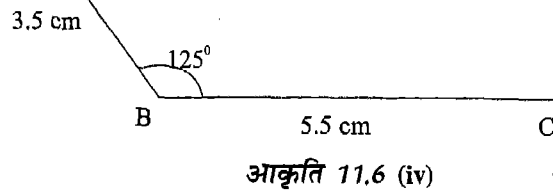
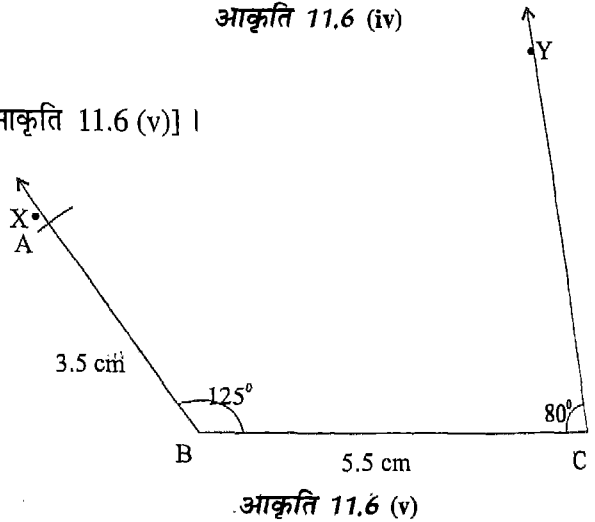
रचना के चरण :

1. BC = 5.5 cm खींचिए [आकृति 11.6(ii)] ।

2. $\angle XBC = 125°$ बनाइए [आकृति 11.6 (iii)]।

3. B को केंद्र मानकर और AB = 3.5 cm त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए जो किरण BX को A पर प्रतिच्छेद करे [आकृति 11.6 (iv)] ।

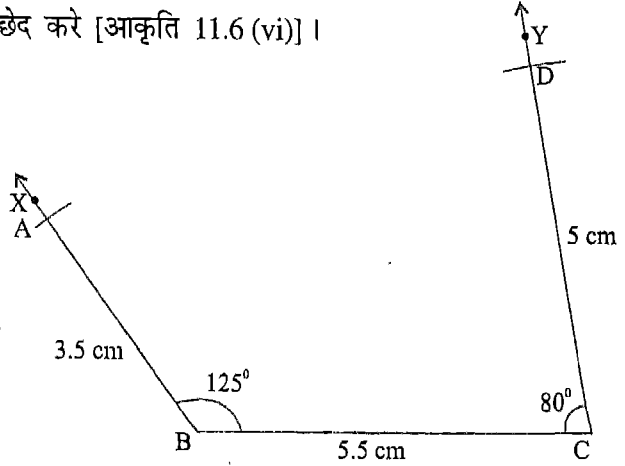
4. C पर, $\angle YCB = 80°$ बनाइए [आकृति 11.6 (v)] ।

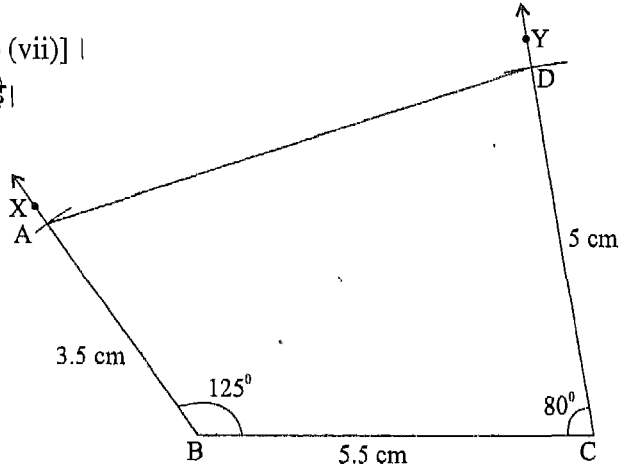
आकृति 11.6 (i)

आकृति 11.6 (ii)

आकृति 11.6 (iii)

आकृति 11.6 (iv)

आकृति 11.6 (v)

5. C को केंद्र मानकर और CD = 5 cm त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए जो किरण CY को D पर प्रतिच्छेद करे [आकृति 11.6 (vi)] ।

आकृति 11.6 (vi)

6. AD को मिलाइए [आकृति 11.6 (vii)] ।
तब, ABCD वांछित चतुर्भुज है।

आकृति 11.6 (vii)

टिप्पणी : उपर्युक्त चारों स्थितियों के अतिरिक्त भी चतुर्भुज की रचना की ज़ा सकती है, जब कि उसके पाँच उपयुक्त भाग दिए हों। उदाहरणार्थ, यदि चतुर्भुज की चार भुजाएँ और एक कोण दिया हो, तो चतुर्भुज की रचना सरलता से की जा सकती है। परंतु यदि चतुर्भुज के चारों कोण और एक भुजा दी हुई हो, तो चतुर्भुज की रचना अद्‌वितीय रूप से नहीं की जा सकती।

प्रश्नावली 11.4

1. एक चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए, जिसमें AB = 4.5 cm, BC = 3.5 cm, CD = 5 cm, $\angle B = 45^\circ$ और $\angle C = 150^\circ$ है।
2. एक चतुर्भुज PQRS की रचना कीजिए, जिसमें PQ = 3.5 cm, QR = 2.5 cm, RS = 4 cm, $\angle Q = 75^\circ$ और $\angle R = 120^\circ$ है।
3. एक चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए, जिसमें AB = BC = 3 cm, AD = 5 cm, $\angle A = 90^\circ$ और $\angle B = 105^\circ$ है।
4. एक चतुर्भुज PQRS की रचना कीजिए, जिसमें $\angle Q = 45^\circ$, $\angle R = 90^\circ$, QR = 5 cm, PQ = 4 cm और RS = 3 cm है।
5. एक चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए, जिसमें AB = AD = 5 cm, CD = 5.5 cm, $\angle A = 90^\circ$ और $\angle D = 120^\circ$ है।
6. एक समलंब ABCD की रचना कीजिए, जिसमें AB || CD, AB = 8 cm, BC = 6 cm, CD = 4 cm और $\angle B = 60^\circ$ है।

   [*संकेत :* तथ्य AB || CD का प्रयोग करके $\angle C$ ज्ञात कीजिए।]

याद रखने योग्य बातें

1. किसी चतुर्भुज की अद्‌वितीय रूप से रचना करने के लिए उसके कम से कम पाँच भागों की मापों की जानकारी आवश्यक है।
2. चतुर्भुज के पाँच भागों की माप निम्नलिखित स्थितियों में उसकी रचना करने के लिए पर्याप्त हैं :

   (i) चार भुजाएँ और एक विकर्ण

   (ii) तीन भुजाएँ और दोनों विकर्ण

   (iii) दो आसन्न भुजाएँ और तीन कोण

   (iv) तीन भुजाएँ और दो अंतर्गत कोण

   (v) चारों भुजाएँ और एक कोण

3. चतुर्भुज की पाँच भागों की माप उसकी रचना करने में पर्याप्त होने के लिए यह आवश्यक है कि जहाँ अनुकूल हों, वे निम्न को भी संतुष्ट करें:

   (i) त्रिभुज का असमिका गुण, अर्थात् त्रिभुज की दो भुजाओं का योग उसकी तीसरी भुजा से अधिक होता है।

   (ii) चतुर्भुज के कोणों का योग गुण।

4. अन्य पर्याप्त मापों वाले चतुर्भुजों की भी रचना की जा सकती है (उपर्युक्त पाँचों सरल स्थितियों के अतिरिक्त), जहाँ पाँच से कम भाग दिए हों, परंतु भागों में अन्य संबंध दिए हुए हों (जैसे चतुर्भुज का समांतर चतुर्भुज या आयत होना, इत्यादि)।

5. यह सदैव सुविधाजनक रहता है कि पहले चतुर्भुज की एक अनुमानित आकृति बना ली जाए और दी हुई मापों को दर्शाया जाए।

अध्याय

12

वृत्त

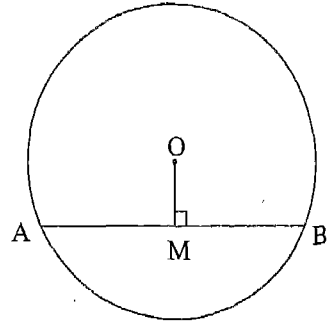
12.1 भूमिका

आप, अपनी पिछली कक्षाओं से, वृत्त एवं संबंधित संकल्पनाओं; जैसे केंद्र, त्रिज्या, व्यास, चाप, अर्धवृत्त, जीवा, वृत्तखंड इत्यादि से पहले ही परिचित हैं। कक्षा VII में, आप वृत्त के निम्नलिखित दो गुणों के बारे में अध्ययन कर चुके हैं :

1. अर्धवृत्त में बना कोण समकोण होता है।
2. एक ही वृत्तखंड में बने कोण बराबर होते हैं।

इस अध्याय में, हम वृत्त के कुछ और गुणों के बारे में अध्ययन करेंगे। ये गुण केंद्र से जीवा पर डाले गए लंबों, जीवाओं और चापों द्वारा केंद्र या वृत्त के किसी बिंदु पर (अंतरित) बनाए गए कोणों तथा एक चक्रीय चतुर्भुज के कोणों से संबंधित हैं।

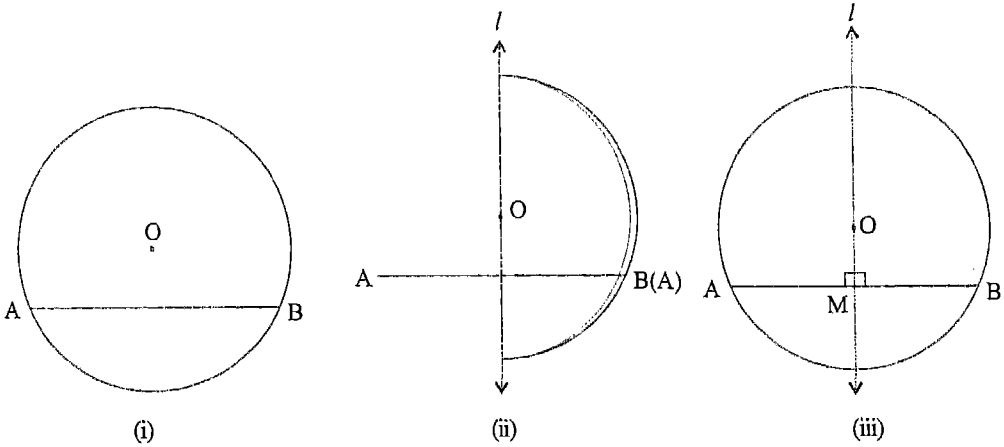
12.2 केंद्र से जीवा पर डाला गया लंब

क्रियाकलाप 1: केंद्र O वाला एक वृत्त खींचिए। साथ ही, इस वृत्त की एक जीवा AB भी खींचिए। $OM \perp AB$ इस प्रकार खींचिए कि M, जीवा AB पर स्थित हो (आकृति 12.1)। भिन्न-भिन्न केंद्र और त्रिज्याएँ लेकर और उनसे दो वृत्त खींचकर इस क्रियाकलाप को दोहराइए। सुविधा की दृष्टि से, इन तीनों स्थितियों में, केंद्र, जीवा और लंब को क्रमशः O, AB और OM से नामांकित कीजिए। दूसरे शब्दों में, *तीनों आकृतियों को एक ही प्रकार से नामांकित कीजिए।* वृत्तों को संख्याओं 1, 2 और 3 से क्रमांकित कीजिए।

आकृति 12.1

प्रत्येक स्थिति में, AM और BM, को मापिए तथा अंतर AM – BM ज्ञात कीजिए। अपने प्रेक्षणों को नीचे दर्शाए अनुसार एक सारणी के रूप में लिखिए :

वृत्त	AM	BM	AM – BM
1			
2			
3			

आप क्या देखते हैं? आप देखेंगे कि प्रत्येक स्थिति में अंतर AM – BM या तो शून्य है या इतना कम है कि इसे छोड़ा जा सकता है। इस प्रकार, सभी स्थितियों में AM = BM है।

क्रियाकलाप 2 : एक अक्स कागज लीजिए और उस पर केंद्र O वाला एक वृत्त खींचिए। इस वृत्त की जीवा AB भी खींचिए [आकृति 12.2 (i)] ।

आकृति 12.2

अब वृत्त को स्वयं वृत्त पर इस प्रकार मोड़िए कि बिंदु A बिंदु B पर पड़े। रेखा l के अनुदिश मोड़ का निशान (crease) प्राप्त करने के लिए कागज को दबाइए [आकृति 12.2 (ii)] । ध्यान दीजिए कि रेखा l केंद्र O से होकर जाती है तथा जीवा AB का एक भाग स्वयं उसी के भाग पर इस प्रकार पड़ता है कि दोनों भाग (एक दूसरे को) परस्पर पूर्णतया ढक लेते हैं।

अब कागज को खोल लीजिए तथा रेखा l और AB के प्रतिच्छेद बिंदु को M से अंकित कीजिए [आकृति. 12.2 (iii)] । अब चूँकि OM स्वयं अपने पर पड़ता है तथा AM, BM के

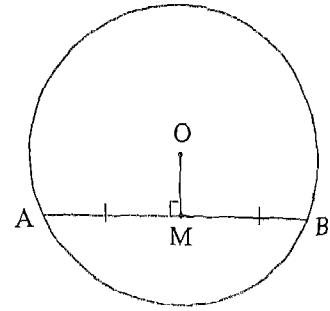
अनुदिश पड़ता है, इसलिए

$\angle OMA = \angle OMB = 90°$ है, अर्थात् $OM \perp AB$ है।

साथ ही, मुड़ी हुई स्थिति में, चूँकि AM, BM के संपाती है, इसलिए AM = BM है।

उपर्युक्त दोनों क्रियाकलाप निम्न गुण प्रदर्शित करते हैं :

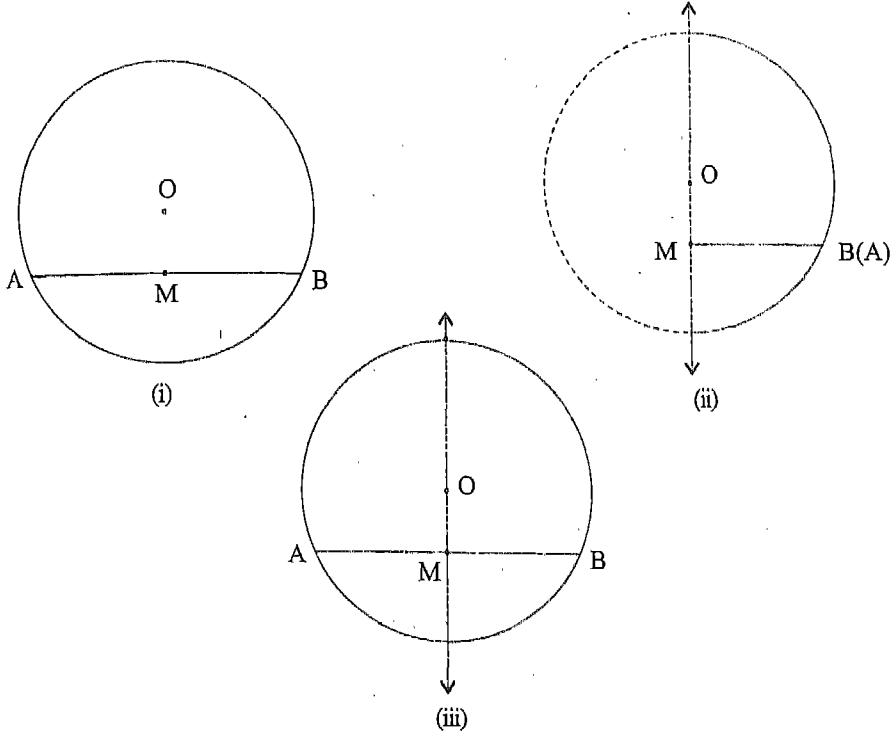
वृत्त में, उसके केंद्र से जीवा पर डाला गया लंब जीवा को समद्विभाजित करता है।

क्रियाकलाप 3: केंद्र O वाला एक वृत्त खींचिए। इसकी एक जीवा AB भी खींचिए। AB को M पर समद्विभाजित कीजिए तथा O और M को मिलाइए (आकृति 12.3)। भिन्न-भिन्न त्रिज्याओं और केंद्रों के दो और वृत्त खींचकर इस क्रियाकलाप को दोहराइए। आकृतियों को एक ही प्रकार से नामांकित कीजिए। वृत्तों को संख्याओं 1, 2 और 3 से क्रमांकित कीजिए। प्रत्येक स्थिति में, $\angle OMA$ को मापिए तथा अंतर $90° - \angle OMA$ ज्ञात कीजिए। अपने प्रेक्षणों को नीचे दर्शाए अनुसार एक सारणी के रूप में लिखिए :

आकृति 12.3

वृत्त	$\angle OMA$	$90° - \angle OMA$
1		
2		
3		

आप क्या देखते हैं? आप देखेंगे कि प्रत्येक स्थिति में, अंतर $90° - \angle OMA$ या तो शून्य है या इतना कम है कि इसे छोड़ा जा सकता है। इस प्रकार, प्रत्येक स्थिति में, $\angle OMA = 90°$ है, अर्थात् $OM \perp AB$ है।

ध्यान दीजिए कि यही परिणाम $\angle OMB$ को मापकर भी प्राप्त किया जा सकता है।

क्रियाकलाप 4 : एक अक्स कागज लीजिए और उस पर केंद्र O वाला एक वृत्त खींचिए। इस वृत्त की एक जीवा AB खींचिए और उसका मध्य-बिंदु M ज्ञात कीजिए [आकृति 12.4 (i)]।

आकृति 12.4

M और O को मिलाइए। अब रेखा MO के अनुदिश कागज को मोड़िए ताकि बिंदु A बिंदु B पर पड़े तथा AB का एक भाग उसके अन्य भाग पर पड़े [आकृति 12.4 (ii)]।

अब कागज को खोलिए [आकृति 12.4 (iii)]। आप क्या देखते हैं? क्या $\angle OMB$ पर $\angle OMA$ पड़ता है ? आप देखेंगे कि वह $\angle OMB$ पर ही पड़ता है। इस प्रकार,

$$\angle OMA = \angle OMB = 90°$$

अर्थात् $OM \perp AB$

क्रियाकलाप 3 और 4 निम्नलिखित गुण प्रदर्शित करते हैं :

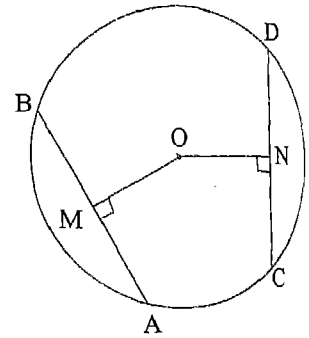
एक वृत्त में, किसी जीवा के मध्य-बिंदु को केंद्र से मिलाने वाली रेखा जीवा पर लंब होती है।

टिप्पणी : आप सरलता से देख सकते हैं कि उपर्युक्त गुण, पिछले गुण का *विलोम* है।

12.3 समान जीवाएँ और उनकी केंद्र से दूरियाँ

एक वृत्त में, हम जितनी चाहें जीवाएँ खींच सकते हैं। कुछ जीवाएँ अन्य जीवाओं से लंबी होती हैं। याद कीजिए कि केंद्र से होकर जाने वाली जीवा, अर्थात् वृत्त का व्यास उसकी सबसे लंबी जीवा होती है। जैसे-जैसे हम जीवा को केंद्र से दूर ले जाते हैं; उसकी लंबाई कम होती जाती है।

माना कि हमें एक वृत्त की दो समान (बराबर) जीवाएँ प्राप्त हैं। हम केंद्र से इनकी दूरियों के बारे में क्या कह सकते हैं? क्या वे केंद्र से समान (बराबर) दूरी पर हैं? दूसरी ओर, मान लीजिए कि हमें दो जीवाएँ ऐसी प्राप्त हैं कि वे केंद्र से समान (बराबर) दूरी पर हैं। क्या ये जीवाएँ समान (बराबर) हैं? इन प्रश्नों का उत्तर प्राप्त करने के लिए, आइए कुछ क्रियाकलाप करें।

क्रियाकलाप 5 : केंद्र O वाला एक वृत्त खींचिए तथा उसकी दो जीवाएँ AB और CD इस प्रकार खींचिए कि AB = CD हो (आकृति 12.5)। O से AB और CD पर $OM \perp AB$ और $ON \perp CD$ खींचिए ताकि M और N क्रमशः AB और CD पर स्थित हों। भिन्न-भिन्न केंद्रों और त्रिज्याओं को लेकर तथा उनसे दो और वृत्त खींचकर इस क्रियाकलाप को दोहराइए। आकृतियों को एक ही प्रकार से नामांकित कीजिए। वृत्तों को संख्याओं 1, 2 और 3 से क्रमांकित कीजिए।

आकृति 12.5

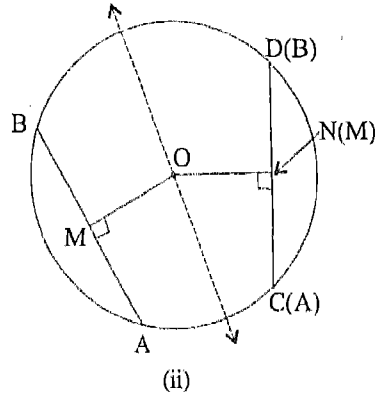
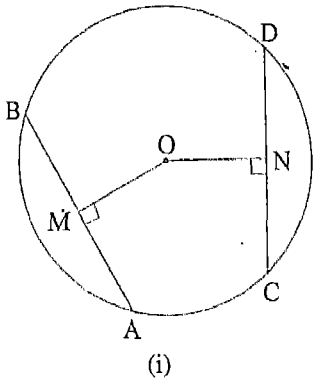
प्रत्येक स्थिति में, OM और ON को मापिए तथा अंतर OM – ON ज्ञात कीजिए। अपने प्रेक्षणों को नीचे दर्शाए अनुसार एक सारणी के रूप में लिखिए :

वृत्त	OM	ON	OM – ON
1			
2			
3			

आप क्या देखतें हैं? आप देखेंगे कि प्रत्येक स्थिति में, अंतर OM – ON या तो शून्य है या इतना कम है कि इसे छोड़ा जा सकता है। इस प्रकार, प्रत्येक स्थिति में OM = ON है।

क्रियाकलाप 6 : एक अक्स कागज लीजिए और उस पर केंद्र O वाला एक वृत्त खींचिए। इस वृत्त की दो समान (बराबर) जीवाएँ AB और CD खींचिए। केंद्र O से $OM \perp AB$ और $ON \perp CD$ इस प्रकार खींचिए कि M और N क्रमश: AB और CD पर स्थित हों [आकृति 12.6 (i)]। बिंदु O से होकर जाती हुई रेखा के अनुदिश कागज को इस प्रकार मोड़िए कि बिंदु A बिंदु

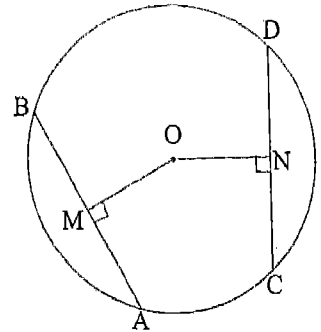
(i)

(ii)

आकृति 12.6

C पर पड़े तथा बिंदु B बिंदु D पर पड़े [आकृति 12.6 (ii)]। M का क्या होता है? क्या वह N पर पड़ता है? हाँ, वह N पर ही पड़ता है। इस प्रकार, $OM = ON$ है।

उपर्युक्त दोनों क्रियाकलाप निम्न गुण प्रदर्शित करते हैं :

वृत्त की समान जीवाएँ केंद्र से समदूरस्थ होती हैं।

क्रियाकलाप 7 : केंद्र O वाला एक वृत्त खींचिए तथा दो समान रेखाखंड OM और ON इस प्रकार खींचिए कि OM और ON की लंबाइयाँ वृत्त की त्रिज्या से कम हों। M से होकर एक जीवा AB खींचिए तथा N से होकर एक जीवा CD खींचिए कि $OM \perp AB$ हो और $ON \perp CD$ हो (आकृति 12.7)। भिन्न-भिन्न केंद्र और त्रिज्याएँ लेकर दो और वृत्त खींचिए तथा इस क्रियाकलाप को दोहराइए। आकृतियों को एक ही प्रकार से नामांकित कीजिए। वृत्तों को संख्याओं 1, 2 और 3 से नामांकित कीजिए।

आकृति 12.7

अब AB और CD को मापिए तथा प्रत्येक स्थिति में अंतर AB – CD ज्ञात कीजिए। अपने प्रेक्षणों को नीचे दर्शाए अनुसार एक सारणी के रूप में लिखिए :

वृत्त	जीवा AB	जीवा CD	AB – CD
1			
2			
3			

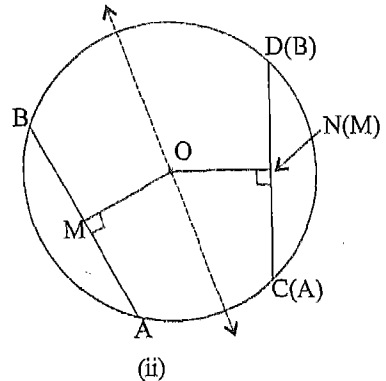
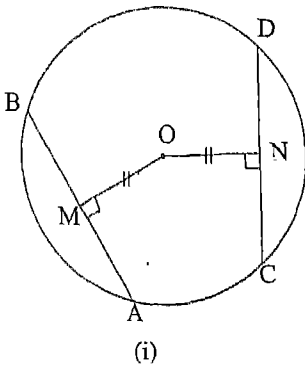
आप क्या देखते हैं? आप देखेंगे कि प्रत्येक स्थिति में, अंतर AB – CD या तो शून्य है या इतना कम है कि इसे छोड़ा जा सकता है। इस प्रकार, सभी स्थितियों में,

AB = CD है, अर्थात् जीवाएँ समान हैं।

क्रियाकलाप 8 : एक अक्स कागज लीजिए और उस पर केंद्र O वाला एक वृत्त खींचिए। अब दो समान रेखाखंड OM और ON इस प्रकार खींचिए कि OM (= ON) की लंबाई वृत्त की त्रिज्या से कम हो। M और N से होकर क्रमशः जीवाएँ AB और CD इस प्रकार खींचिए कि $OM \perp AB$ और $ON \perp CD$ हो [आकृति 12.8 (i)]।

अब कागज को केंद्र O से होकर जाती हुई रेखा के अनुदिश इस प्रकार मोड़िए कि बिंदु M बिंदु N पर पड़े [आकृति 12.8 (ii)] । आप क्या देखते हैं? आप देखेंगे कि बिंदु A, बिंदु C पर पड़ता है तथा B, बिंदु D पर पड़ता है। इस प्रकार, AB = CD है।

(i)

(ii)

आकृति 12.8

उपर्युक्त दोनों क्रियाकलाप निम्न गुण को प्रदर्शित करते हैं :

वृत्त के केंद्र से समदूरस्थ जीवाएँ समान (बराबर) होती हैं।

टिप्पणी : ध्यान दीजिए कि यह गुण पिछले गुण का *विलोम* है। अब इन गुणों को स्पष्ट करने के लिए, हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 1 : 10 cm त्रिज्या वाले वृत्त में एक जीवा केंद्र से 6 cm की दूरी पर है। इस जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए AB त्रिज्या 10 cm वाले वृत्त की एक जीवा है जो केंद्र O से 6 cm की दूरी पर है। मान लीजिए $OM \perp AB$ है (आकृति 12.9)।

इस प्रकार, $OA = 10$ cm और $OM = 6$ cm है।

अब पाइथागोरस प्रमेय से,

$$OA^2 = AM^2 + OM^2$$

या $$AM^2 = OA^2 - OM^2$$

$$= (10^2 - 6^2)\text{cm}^2$$

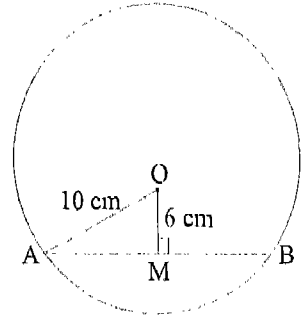
$$= 64 \text{ cm}^2$$

या $$AM = 8 \text{ cm}$$

आकृति 12.9

अब, $AB = 2\ AM$ (केंद्र से डाला गया लंब जीवा को समद्विभाजित करता है।)

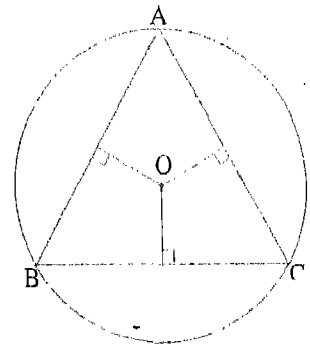
अर्थात् $AB = 2 \times 8 \text{ cm} = 16 \text{ cm}$

इस प्रकार, वांछित जीवा की लंबाई 16 cm है।

उदाहरण 2 : ΔABC की भुजाएँ उसके परिवृत्त के केंद्र O से समदूरस्थ हैं (आकृति 12.10)। ΔABC किस प्रकार का त्रिभुज है?

हल : $AB = BC$ (केंद्र से समदूरस्थ जीवाएँ समान होती हैं।)

इसी प्रकार, $BC = CA$

इसी प्रकार, $AB = BC = CA$

अतः, ΔABC एक समबाहु त्रिभुज है।

आकृति 12.10

उदाहरण 3: AB और CD केंद्र O वाले वृत्त की दो समान जीवाएँ हैं (आकृति 12.11)। AB और CD को बढ़ाने पर ये वृत्त के बाहर बिंदु S पर मिलती हैं। $OM \perp AB$ और $ON \perp CD$ है, जहाँ M और N क्रमशः AB और CD पर स्थित हैं।

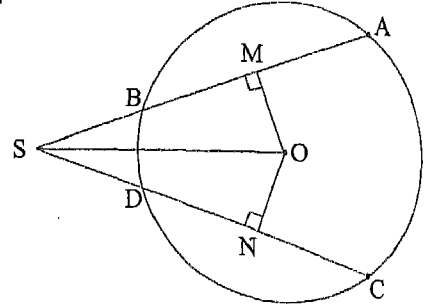
निम्न कथनों के लिए कारण दीजिए :

(i) $OM = ON$

(ii) $\Delta\ OMS \cong \Delta\ ONS$

(iii) $MS = NS$

(iv) $AM = CN$

(v) $AS = CS$

आकृति 12.11

हल : (i) $OM = ON$ (समान जीवाएँ केंद्र O से समदूरस्थ होती हैं।)

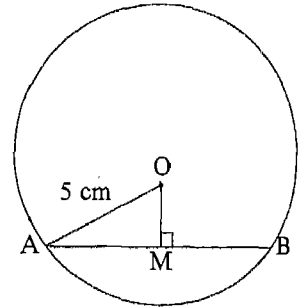
(ii) $\Delta OMS \cong \Delta\ ONS$ (RHS से, क्योंकि $\angle OMS = \angle ONS = 90°$, $OS = OS$ और $OM = ON$)

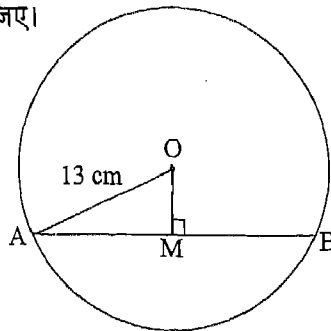
(iii) $MS = NS$ [सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग (Corresponding parts of congruent triangles – CPCT)]

(iv) $AM = CN$ (M और N क्रमशः समान जीवाओं AB और CD के मध्य-बिंदु हैं।)

(v) $AS = CS$ ($AS = AM + MS$ तथा $CS = CN + NS$ है।)

प्रश्नावली 12.1

1. AB केंद्र O और त्रिज्या 5 cm वाले वृत्त की एक जीवा है (आकृति 12.12)। यदि $OM \perp AB$ तथा $AB = 8$ cm है, तो OM की लंबाई ज्ञात कीजिए।

आकृति 12.12

2. AB केंद्र O और त्रिज्या 13 cm वाले वृत्त की एक जीवा है (आकृति 12.13)। यदि $OM \perp AB$ तथा $OM = 5$ cm है, तो जीवा AB की लंबाई ज्ञात कीजिए।

आकृति 12.13

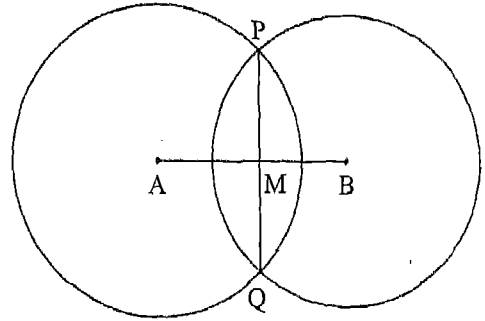
3. केंद्र O और त्रिज्या 7.5 cm वाले वृत्त की एक जीवा की लंबाई 9 cm है। इस जीवा की केंद्र से दूरी ज्ञात कीजिए।

4. त्रिज्या 13 cm वाले वृत्त में एक जीवा केंद्र से 12 cm की दूरी पर खींची गई है। इस जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

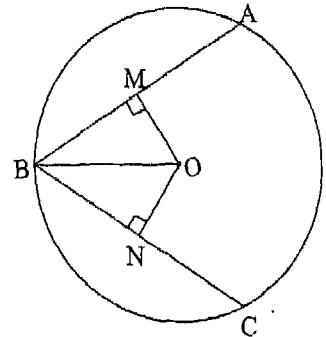
5. वृत्त की एक जीवा 6 cm लंबी है तथा केंद्र से 4 cm की दूरी पर स्थित है। वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

6. A, B और C किसी वृत्त पर स्थित तीन बिंदु है जिसका केंद्र अंकित नहीं किया गया है। आप केंद्र को किस प्रकार ज्ञात करेंगे?

[*संकेत:* यदि M जीवा AB का मध्य-बिंदु है तथा O वृत्त का केंद्र है, तो $OM \perp AB$ होगा।]

7. केंद्र A और B वाले दो वृत्त एक-दूसरे को बिंदु P और Q पर प्रतिच्छेदित करते हैं तथा M रेखाखंड PQ का मध्य-बिंदु है (आकृति 12.14)। निम्न कथनों के लिए कारण दीजिए :

(i) $AM \perp PQ$
(ii) $BM \perp PQ$
(iii) A, M और B सरेख हैं

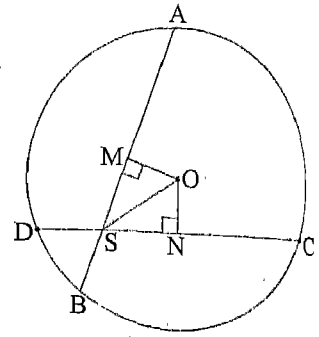
आकृति 12.14

8. AB और BC केंद्र O वाले वृत्त की दो समान जीवाएँ हैं (आकृति 12.15)। $OM \perp AB$ और $ON \perp BC$ है, जहाँ M और N क्रमश: AB और BC पर स्थित हैं। O और B को मिलाया जाता है। निम्न कथनों के लिए कारण दीजिए :

(i) $OM = ON$

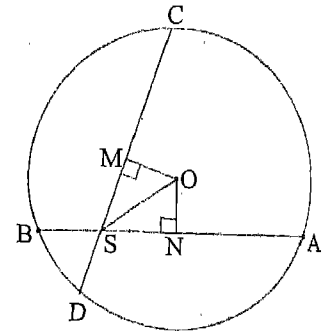
(ii) $\Delta\, OMB \cong \Delta\, ONB$

(iii) BO कोण ABC को समद्विभाजित करती है

आकृति 12.15

9. AB और CD केंद्र O वाले वृत्त की दो समान जीवाएँ हैं जो एक-दूसरे को बिंदु S पर प्रतिच्छेदित करती हैं (आकृति 12.16)। $OM \perp AB$ और $ON \perp CD$ है, जहाँ M और N क्रमशः AB और CD पर स्थित हैं। O और S को मिलाया जाता है। निम्न कथनों के लिए कारण दीजिए :

   (i) $OM = ON$
   (ii) $\Delta\ OMS \cong \Delta\ ONS$
   (iii) $MS = NS$
   (iv) $AS = CS$
   (v) $BS = DS$

आकृति 12.16

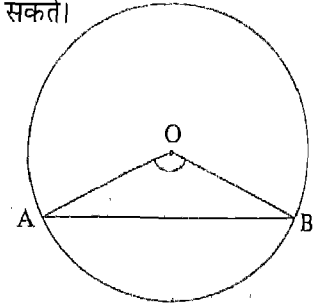
10. केंद्र O वाले वृत्त की जीवाएँ AB और CD बिंदु S पर प्रतिच्छेद करती हैं (आकृति 12.17)। $OM \perp AB$ और $ON \perp CD$ है, जहाँ M और N क्रमशः AB और CD पर स्थित हैं। OM और ON को मिलाया जाता है। यदि $\angle OSM = \angle OSN$ हो, तो निम्न कथनों के लिए कारण दीजिए :

    (i) $\Delta OSM \cong \Delta OSN$
    (ii) $OM = ON$
    (iii) $AB = CD$

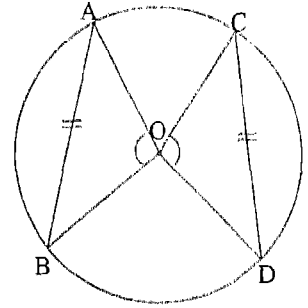
आकृति 12.17

11. बताइए कि निम्न कथन सत्य (T) हैं या असत्य (F) :

    (i) वृत्त के केंद्र से जीवा पर डाला गया लंब जीवा को समद्विभाजित करता है।
    (ii) केंद्र से समदूरस्थ जीवाएँ असमान हो सकती हैं।
    (iii) एक वृत्त में, केंद्र को जीवा के मध्य बिंदु से मिलाने वाली रेखा जीवा पर लंब होती है।
    (iv) कोई भी तीन संरेख बिंदु एक वृत्त पर स्थित नहीं हो सकते।

12.4 समान जीवाओं द्वारा केंद्र पर बनाए गए कोण

आकृति 12.18 में, AB केंद्र O वाले वृत्त की एक जीवा है। $\angle AOB$ जीवा AB द्वारा केंद्र O पर बनाया गया (अंतरित) कोण है। हमारी रुचि यह जानने में हो सकती है कि क्या जीवा AB की लंबाई और उसके द्वारा केंद्र पर बनाए गए कोण में कोई संबंध हो सकता है। आइए इसकी जाँच करें।

आकृति 12.18

क्रियाकलाप 9 : केंद्र O वाला एक वृत्त खींचिए तथा इसकी दो समान जीवाएँ AB और CD खींचिए। OA, OB, OC और OD को मिलाइए (आकृति 12.19)।

आकृति 12.19

भिन्न-भिन्न केंद्र और त्रिज्याओं वाले दो अन्य वृत्त खींचकर इस क्रियाकलाप को दोहराइए। आकृतियों को एक ही प्रकार से नामांकित कीजिए। वृत्तों को संख्याओं 1, 2 और 3 से क्रमांकित कीजिए। $\angle AOB$ और $\angle COD$ को मापिए तथा प्रत्येक स्थिति में अंतर $\angle AOB - \angle COD$ ज्ञात कीजिए।

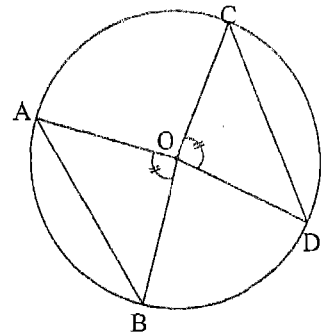
अपने प्रेक्षणों को नीचे दर्शाए अनुसार एक सारणी के रूप में लिखिए :

वृत्त	$\angle AOB$	$\angle COD$	$\angle AOB - \angle COD$
1			
2			
3			

आप क्या देखते हैं? आप देखेंगे कि प्रत्येक स्थिति में, अंतर $\angle AOB - \angle COD$ या तो शून्य है या इतना कम है कि इसे छोड़ा जा सकता है। इस प्रकार, सभी स्थितियों में, $\angle AOB = \angle COD$ है।

इस क्रियाकलाप से निम्न गुण प्रदर्शित होता है :

वृत्त की समान जीवाएँ केंद्र पर समान कोण बनाती (अंतरित करती) हैं।

क्रियाकलाप 10 : केंद्र O वाला एक वृत्त खींचिए। इस वृत्त की चार त्रिज्याएँ OA, OB, OC और OD इस प्रकार खींचिए कि $\angle AOB = \angle COD$ हो। AB और CD को मिलाइए (आकृति 12.20)।

आकृति 12.20

भिन्न-भिन्न केंद्र और त्रिज्याओं वाले दो वृत्त खींचकर इस क्रियाकलाप को दोहराइए। आकृतियों को एक ही प्रकार से नामांकित कीजिए। वृत्तों को संख्याओं 1, 2 और 3 से क्रमांकित कीजिए।

AB और CD को मापिए तथा प्रत्येक स्थिति में अंतर AB – CD ज्ञात कीजिए। अपने प्रेक्षणों को नीचे दर्शाए अनुसार एक सारणी के रूप में लिखिए :

वृत्त	AB	CD	AB – CD
1			
2			
3			

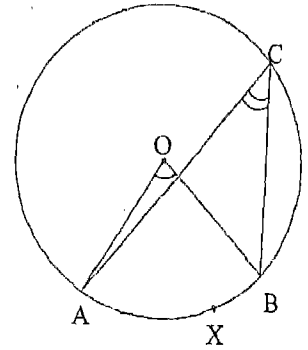
आप क्या देखते हैं? आप देखेंगे कि प्रत्येक स्थिति में, अंतर AB – CD या तो शून्य है या इतना कम है कि इसे छोड़ा जा सकता है। इस प्रकार, सभी स्थितियों में AB = CD है।

इस क्रियाकलाप से निम्न गुण प्रदर्शित होता है :

केंद्र पर समान कोण बनाने वाली जीवाएँ समान होती हैं।

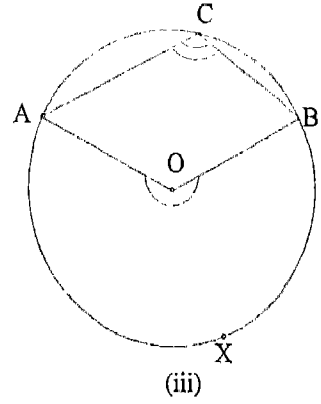
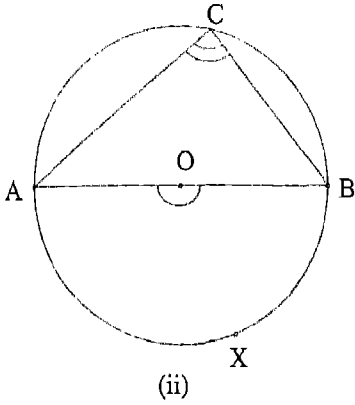
टिप्पणी: ध्यान दीजिए कि यह गुण पिछले गुण का *विलोम* है।

12.5 एक चाप द्वारा वृत्त के केंद्र और उसके शेष भाग पर स्थित किसी बिंदु पर बनाए गए कोण

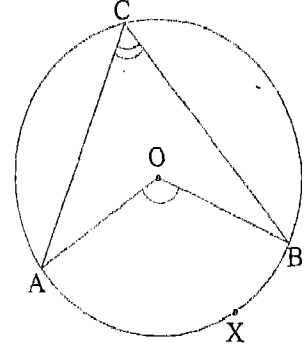
आकृति 12.21 (i) को देखिए। AXB केंद्र O वाले वृत्त का एक चाप है, $\angle AOB$ चाप AXB द्वारा केंद्र पर बनाया गया कोण है तथा $\angle ACB$ इसी चाप द्वारा वृत्त के शेष भाग पर स्थित किसी बिंदु C पर बनाया गया कोण है। ध्यान दीजिए कि आकृति 12.21 (ii) में AXB एक अर्धवृत्त है और केंद्र पर इसके द्वारा बनाया गया कोण AOB एक ऋजु कोण है, जबकि आकृति 12.21 (iii) में AXB एक दीर्घ चाप है तथा इसके द्वारा केंद्र O पर बनाया गया कोण AOB एक प्रतिवर्ती कोण है।

आकृति 12.21

हमारी यह जानने में रुचि हो सकती है कि क्या $\angle AOB$ और $\angle ACB$ में कोई संबंध विद्यमान है। आइए इसकी जाँच करें।

(ii)

(iii)

आकृति 12.21

क्रियाकलाप 11 : केंद्र O वाला एक वृत्त खींचिए। इसका एक चाप AXB लीजिए और वृत्त के शेष भाग पर कोई बिंदु C लीजिए। OA, OB, CA और CB को मिलाइए(आकृति 12.22)।

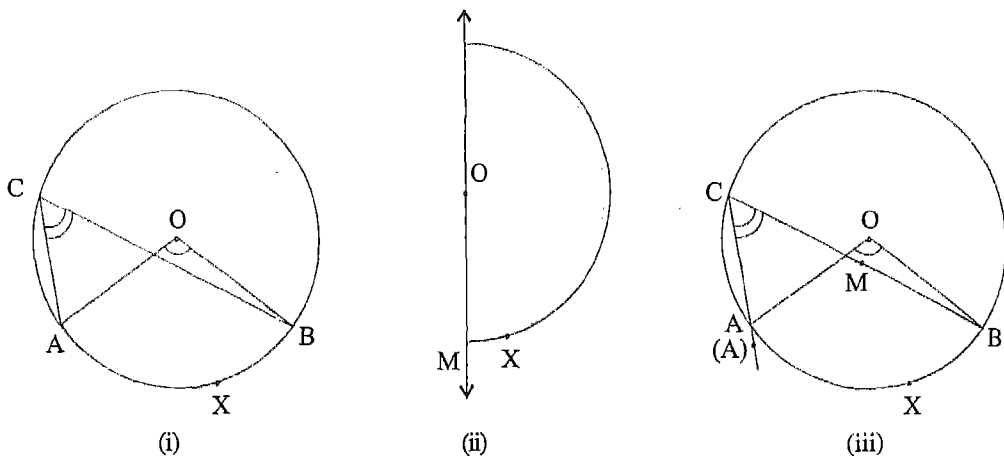
भिन्न-भिन्न केंद्र और त्रिज्याओं वाले दो और वृत्त खींचकर इस क्रियाकलाप को दोहराइए। आकृतियों को एक ही प्रकार से नामांकित कीजिए। वृत्तों को संख्याओं 1, 2 और 3 से क्रमांकित कीजिए।

आकृति 12.22

$\angle AOB$ और $\angle ACB$ को मापिए तथा प्रत्येक स्थिति में अंतर $\angle AOB - 2\angle ACB$ ज्ञात कीजिए। अपने प्रेक्षणों को नीचे दर्शाए अनुसार एक सारणी के रूप में लिखिए:

वृत्त	$\angle AOB$	$\angle ACB$	$2\angle ACB$	$\angle AOB - 2\angle ACB$
1				
2				
3				

आप क्या देखते हैं? आप देखेंगे कि प्रत्येक स्थिति में, अंतर $\angle AOB - 2\angle ACB$ या तो शून्य है या इतना कम है कि इसे छोड़ा जा सकता है। इस प्रकार, सभी स्थितियों में $\angle AOB = 2\angle ACB$ है।

क्रियाकलाप 12 : एक अक्स कागज लीजिए और उस पर केंद्र O वाला एक वृत्त खींचिए। इसका कोई चाप AXB लीजिए और वृत्त के शेष भाग पर कोई बिंदु C अंकित कीजिए [आकृति 12.23 (i)]। AC और BC को मिलाकर $\angle ACB$ तथा OA और OB को मिलाकर $\angle AOB$ प्राप्त कीजिए।

अब कागज को O से होकर जाती हुई एक रेखा OM के अनुदिश इस प्रकार मोड़िए कि बिंदु A बिंदु B पर पड़े [आकृति 12.23 (ii)]। इस स्थिति में, $\angle AOM$, $\angle BOM$ पर पड़ेगा, अर्थात् $\angle AOM = \angle BOM$ होगा। (इसका अर्थ है कि $\angle AOM = \angle BOM = \frac{1}{2} \angle AOB$ है) अब कागज को खोलने के बाद, $\angle AOM$ (या $\angle BOM$) की एक अक्स प्रतिलिपि बनाइए तथा उसे $\angle ACB$ पर रखिए। आप क्या देखते हैं?

आकृति 12.23

आप देखेंगे कि $\angle AOM$, $\angle ACB$ को पूर्णतया ढक लेता है [आकृति 12.23 (iii)]।

इसी प्रकार, $\angle ACB = \angle AOM$ $(= \angle BOM)$.

अर्थात्, $\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB$

या $\angle AOB = 2\,\angle ACB$

उपर्युक्त दोनों क्रियाकलापों से निम्न गुण प्रदर्शित होता है :

वृत्त के किसी चाप द्वारा केंद्र पर बनाया गया कोण उसके द्वारा वृत्त के शेष भाग पर स्थित किसी बिंदु पर बनाए गए कोण का दुगुना होता है।

टिप्पणियाँ 1 : चाप AXB द्वारा वृत्त के केंद्र O पर बनाया गया कोण ∠AOB चाप AXB का *केंद्रीय कोण* (*central angle*) कहलाता है तथा चाप AXB केंद्रीय कोण AOB के संगत *अंत:खंडित चाप* (*intercepted arc*) कहलाता है।

2. अर्धवृत्त की स्थिति में $\angle ACB = 90°$ होता है।

अब इन गुणों को स्पष्ट करने के लिए, हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 4 : आकृति 12.24 में, केंद्र O वाले वृत्त के अंतर्गत ABCD एक वर्ग है। ∠AOB, ∠BOC, ∠COD और ∠DOA ज्ञात कीजिए।

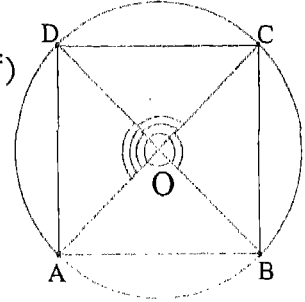
हल : AB = BC = CD = DA (वर्ग की भुजाएँ बराबर होती हैं)

अत:, $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOA$

(समान जीवाएँ केंद्र पर समान कोण बनाती हैं)

इसलिए, $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD$

$= \angle DOA$

$= \frac{1}{4} \times 360° = 90°$

आकृति 12.24

उदाहरण 5 : केंद्र O वाले वृत्त के अंतर्गत एक Δ ABC है (आकृति 12.25)। साथ ही, ∠AOB = 120° और ∠BOC = 150° है।

ज्ञात कीजिए: (i) ∠BAC (ii) ∠ACB (iii) ∠ABC

हल : (i) $\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC$

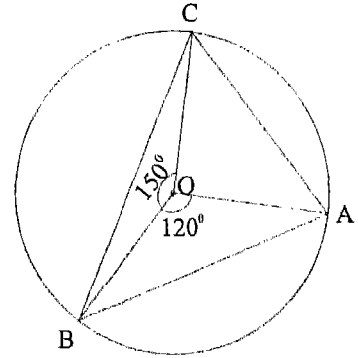
(केंद्र पर बनाया गया कोण शेष भाग पर स्थित किसी बिंदु पर बनाए गए कोण का दुगुना होता है)

$= \frac{1}{2} \times 150° = 75°$

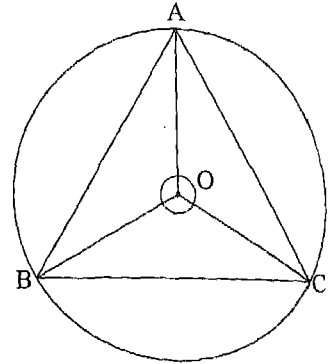
(ii) इसी प्रकार, $\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB$

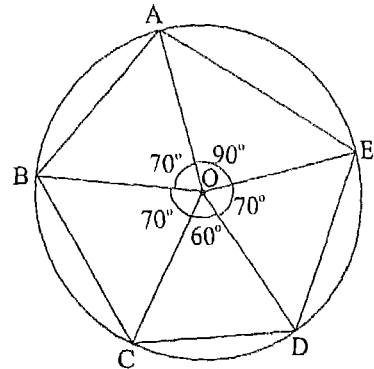
$= \frac{1}{2} \times 120° = 60°$

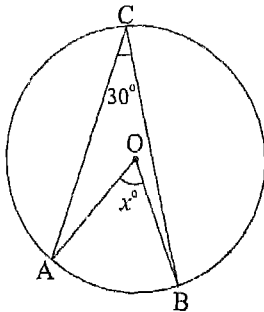
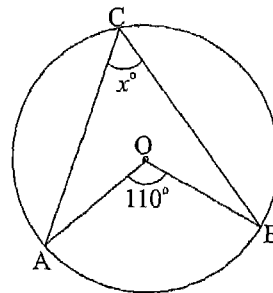
(iii) $\angle ABC = 180° - (75° + 60°)$ (त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है)

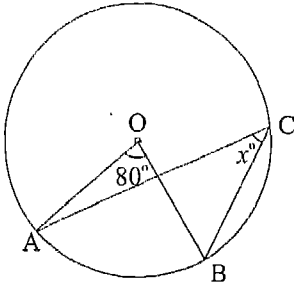
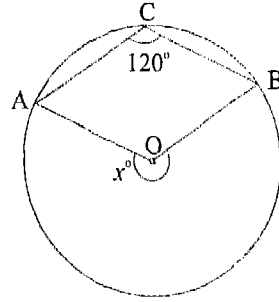
$= 45°$

आकृति 12.25

प्रश्नावली 12.2

1. केंद्र O वाले वृत्त के अंतर्गत एक समबाहु त्रिभुज ABC है (आकृति 12.26)। $\angle BOC$, $\angle COA$ और $\angle AOB$ ज्ञात कीजिए।

आकृति 12.26

2. आकृति 12.27 में, एक पंचभुज (पाँच भुजाओं वाली एक बंद आकृति) ABCDE केंद्र O वाले वृत्त के अंतर्गत बना है।
   (i) क्या AB = AE है? क्यों?
   (ii) क्या AE = DE है? क्यों?
   (iii) क्या AB = DE है? क्यों?
   (iv) क्या DE = CD है? क्यों?
   (v) क्या BC = DE है? क्यों?
   (vi) क्या BC = DC है? क्यों?
   (vii) क्या AB = BC है? क्यों?

आकृति 12.27

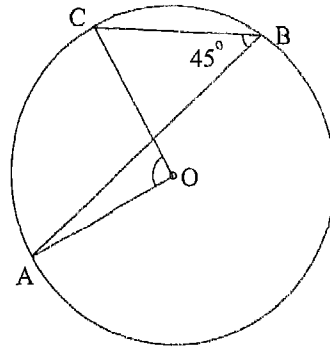
3. आकृति 12.28 में, O वृत्त का केंद्र है। प्रत्येक स्थिति के लिए x का मान ज्ञात कीजिए।

(i)

(ii)

आकृति 12.28

(iii)

(iv)

आकृति 12.28

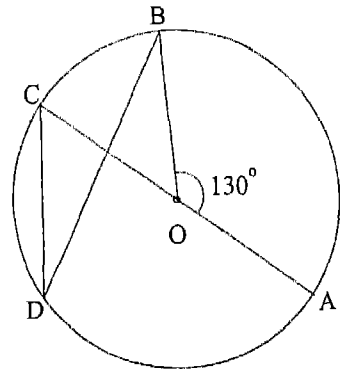
4. आकृति 12.29 में, O वृत्त का केंद्र है तथा $\angle ABC = 45°$ है।

   (i) $\angle AOC$ ज्ञात कीजिए।

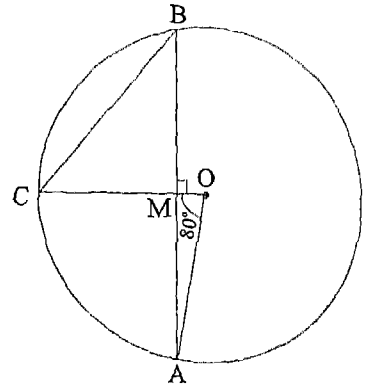
   (ii) क्या $OA \perp OC$ है?

आकृति 12.29

5. आकृति 12.30 में, AC केंद्र O वाले वृत्त का एक व्यास है। यदि $\angle AOB = 130°$ है, तो ज्ञात कीजिए :

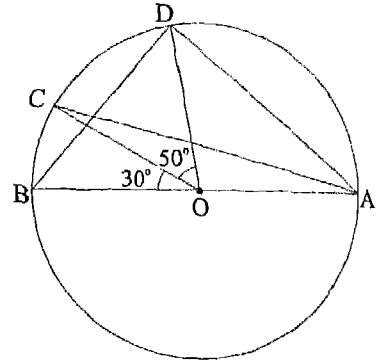
   (i) $\angle BOC$

   (ii) $\angle BDC$

आकृति 12.30

6. केंद्र O वाले वृत्त में AB एक जीवा है और $OM \perp AB$ है तथा वृत्त से बिंदु C मिलती है (आकृति 12.31)। यदि $\angle AOC = 80°$ है, तो ज्ञात कीजिए :

(i) $\angle ABC$
(ii) $\angle MCB$

आकृति 12.31

7. आकृति 12.32 में, केंद्र O वाले वृत्त का एक व्यास AB है। यदि $\angle BOC = 30°$ और $\angle COD = 50°$ है, तो ज्ञात कीजिए :

(i) $\angle BAC$
(ii) $\angle CAD$
(iii) $\angle AOD$
(iv) $\angle ABD$

आकृति 12.32

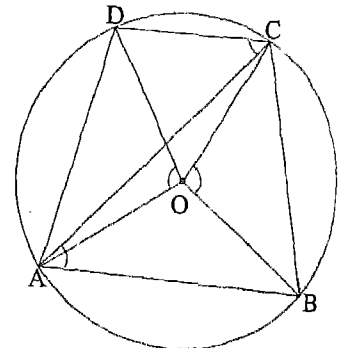
8. केंद्र O वाले वृत्त के अंतर्गत एक समलंब ABCD ($AB \parallel DC$ के साथ) बना हुआ है (आकृति 12.33)। विकर्ण AC को मिलाया गया है तथा OA, OB, OC और OD को भी मिलाया गया है।

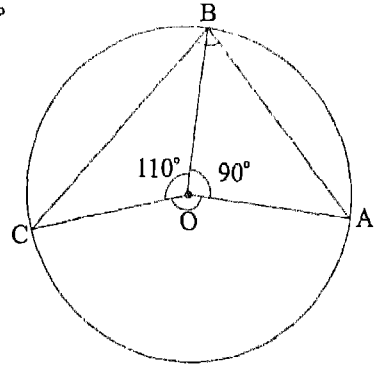
(i) क्या $\angle BAC = \angle DCA$ है? क्यों?

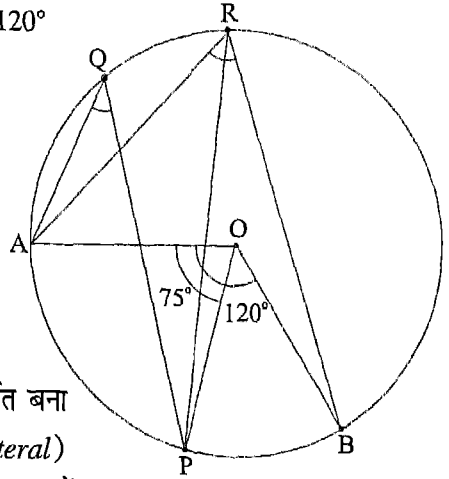
(ii) क्या $\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC$ है? क्यों?

(iii) क्या $\angle DCA = \frac{1}{2} \angle DOA$ है? क्यों?

(iv) क्या $\angle BOC = \angle DOA$ है? क्यों?

(v) क्या BC = AD है? क्यों?

आकृति 12.33

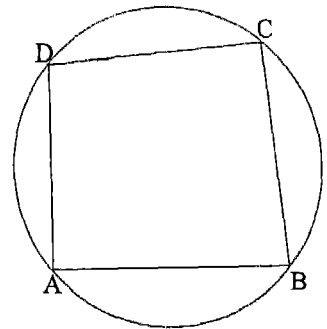
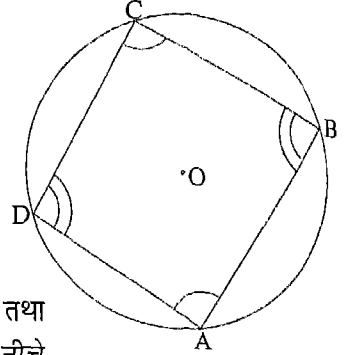
9. आकृति 12.34 में, $\angle AOB = 90°$ और $\angle BOC = 110°$ है, जहाँ O वृत्त का केंद्र है। ज्ञात कीजिए :
   (i) $\angle AOC$
   (ii) $\angle ABC$

आकृति 12.34

10. केंद्र O वाले वृत्त के लघु चाप AB पर स्थित एक बिंदु P है (आकृति 12.35)। यदि $\angle AOB = 120°$ और $\angle AOP = 75°$ है, तो ज्ञात कीजिए :
   (i) $\angle ARB$
   (ii) $\angle AQP$
   (iii) $\angle ARP$
   (iv) $\angle BRP$

आकृति 12.35

12.6 चक्रीय चतुर्भुज और उसके कोण

आकृति 12.36 में, चतुर्भुज ABCD एक वृत्त के अंतर्गत बना हुआ है। यह एक *चक्रीय चतुर्भुज* (*cyclic quadrilateral*) कहलाता है। दूसरे शब्दों में, *वह चतुर्भुज जिसके चारों शीर्ष एक वृत्त पर स्थित हों, चक्रीय चतुर्भुज कहलाता है।* ये चारों शीर्ष A, B, C, और D एक वृत्तीय बिंदु या *चक्रीय बिंदु* (*concyclic points*) कहलाते हैं।

आकृति 12.36

हम जानते हैं कि चतुर्भुज ABCD के कोण A, B, C और D इस अर्थ में परस्पर संबंधित हैं कि इन चारों का योग 360^0 होता है। इस तथ्य को दृष्टिगत रखते हुए कि चतुर्भुज ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज भी है, उसके कोणों के मध्य कोई अन्य संबंध भी विद्यमान हो सकते हैं। आइए इन संबंधों की जाँच करें।

क्रियाकलाप 13 : केंद्र O वाला एक वृत्त खींचिए और इसके अंतर्गत एक चतुर्भुज ABCD बनाइए (आकृति 12.37)। भिन्न-भिन्न केंद्र और त्रिज्याएँ लेकर दो और वृत्त खींचिए तथा इस क्रियाकलाप को दोहराइए। इन आकृतियों को एक ही प्रकार से नामांकित कीजिए। चतुर्भुजों को संख्याओं 1, 2 और 3 से क्रमांकित कीजिए।

प्रत्येक स्थिति में, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ और $\angle D$ को मापिए तथा योग $\angle A + \angle C$ और $\angle B + \angle D$ ज्ञात कीजिए। अपने प्रेक्षणों को नीचे दर्शाए अनुसार एक सारणी के रूप में लिखिए :

आकृति 12.37

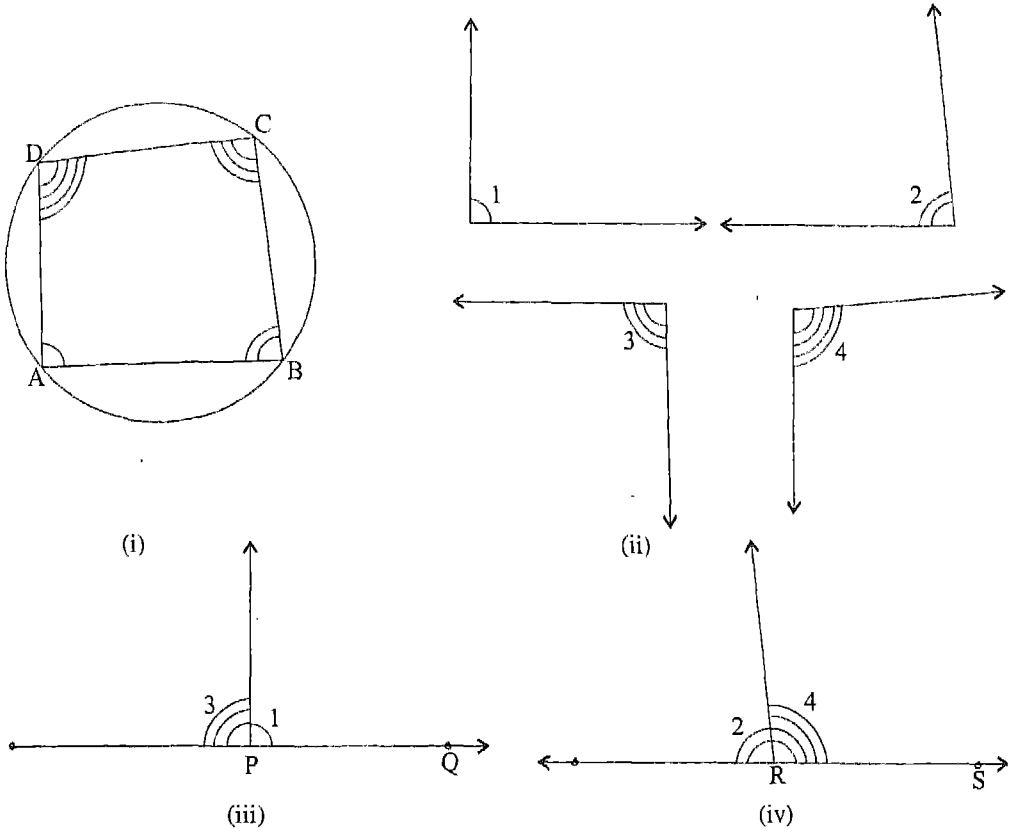
चतुर्भुज	$\angle A$	$\angle C$	$\angle A + \angle C$	$\angle B$	$\angle D$	$\angle B + \angle D$
1						
2						
3						

आप क्या देखतें हैं? आप देखेंगे कि प्रत्येक स्थिति में, योग $\angle A + \angle C$ या तो 180° के बराबर है या 180° से थोड़ा अधिक या थोड़ा कम है। योग $\angle B + \angle D$ के बारे में भी यही परिणाम प्राप्त होता है। इस प्रकार, प्रत्येक स्थिति में,

$\angle A + \angle C = 180°$ और $\angle B + \angle D = 180°$ है।

क्रियाकलाप 14 : एक गत्ते पर एक वृत्त खींचिए। इस वृत्त के अंतर्गत एक चतुर्भुज ABCD बनाइए [आकृति 12.38 (i)]।

एक अक्स कागज और एक कैंची की सहायता से, एक अन्य गत्ते से चतुर्भुज ABCD के कोणों A, B, C और D के बराबर क्रमशः कोण 1, 2, 3 और 4 काट लीजिए [आकृति 12.38 (ii)]।

अब एक रेखा PQ खींचिए तथा $\angle 1$ और $\angle 3$ को इस प्रकार रखिए कि इनमें से प्रत्येक का शीर्ष P पर रहे और $\angle 1$ की एक भुजा किरण PQ के अनुदिश रहे तथा उसकी दूसरी भुजा $\angle 3$ की एक भुजा के साथ, बिना किसी अतिव्याप्तता (overlapping) के, संपाती हों [आकृति 12.38 (iii)]। $\angle 3$ की दूसरी भुजा के बारे में आप क्या देखतें हैं? आप देखेंगे कि $\angle 3$ की दूसरी भुजा रेखा QP के अनुदिश स्थित है (किरण PQ के विपरीत)। इस प्रकार, $\angle 1 + \angle 3 = 180°$ अर्थात् $\angle A + \angle C = 180°$ है।

आकृति 12.38

इसी प्रकार, $\angle 2$ और $\angle 4$ को लेकर यह देखा जा सकता है कि

$\angle 2 + \angle 4 = 180°$ [आकृति 12.38 (iv)]

अर्थात् $\angle B + \angle D = 180°$ है।

उपर्युक्त दोनों क्रियाकलाप एक चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का निम्न गुण प्रदर्शित करते हैं :

चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण संपूरक होते हैं।

टिप्पणी : उपर्युक्त से यह निष्कर्ष निकलता है कि चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के युग्मों के कोणों के योग परस्पर बराबर हैं। उदाहरणार्थ, आकृति 12.39 के चक्रीय चतुर्भुज ABCD के लिए, $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$ है।

इस गुण को स्पष्ट करने के लिए, आइए कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 6 : एक चक्रीय चतुर्भुज ABCD की भुजा AB को बिंदु E तक बढ़ाया गया है (आकृति 12.39)। यदि $\angle ADC = 120°$ है, तो ज्ञात कीजिए :

(i) $\angle ABC$ (ii) $\angle CBE$

आकृति 12.39

हल : (i) $\angle ABC + \angle ADC = 180°$

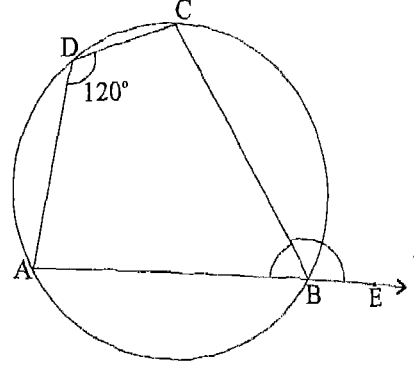
(चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण)

अर्थात् $\angle ABC + 120° = 180°$

या $\angle ABC = 60°$

(ii) $\angle ABC + \angle CBE = 180°$ (रैखिक युग्म)

अर्थात् $60° + \angle CBE = 180°$

या $\angle CBE = 180° - 60° = 120°$

टिप्पणी : ध्यान दीजिए कि चक्रीय चतुर्भुज का एक बाह्य कोण सम्मुख अंत: कोण के बराबर है।

उदाहरण 7 : आकृति 12.40 में, $\angle FDE = 85°$ और $\angle C = 70°$ है। चतुर्भुज ABCD के निम्न कोण ज्ञात कीजिए : (i) $\angle A$ (ii) $\angle D$ (iii) $\angle B$

हल : (i) $\angle C = 70°$ (दिया है)

अत:, $\angle A + 70° = 180°$ (चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण)

या $\angle A = 180° - 70° = 110°$

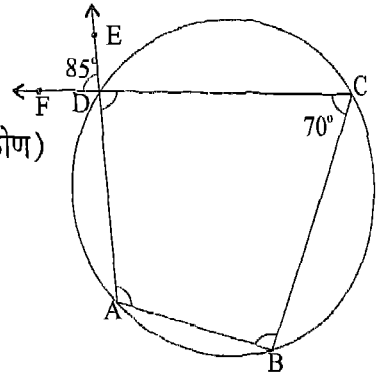
(ii) $\angle ADC = \angle FDE$ (शीर्षाभिमुख कोण)

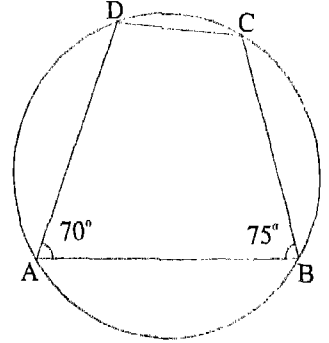
$= 85°$

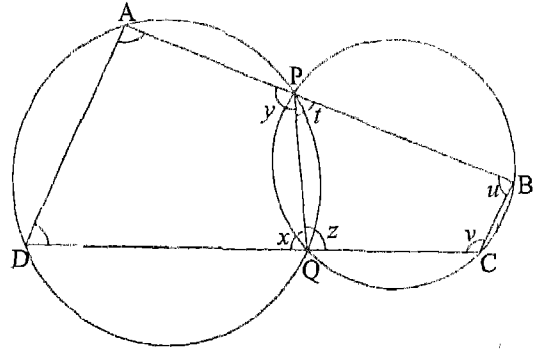
आकृति 12.40

(iii) $\angle B + \angle ADC = 180°$ (चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण)

अर्थात् $\angle B + 85° = 180°$

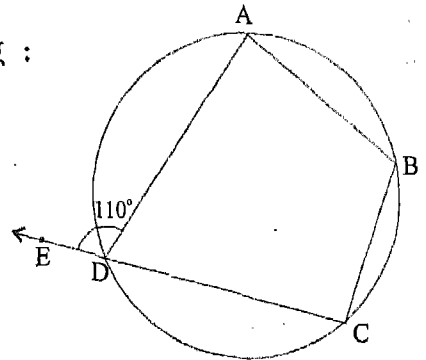
या $\angle B = 180° - 85° = 95°$

प्रश्नावली 12.3

1. ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है, जिसमें $\angle A = 70°$ और $\angle B = 75°$ है (आकृति 12.41)। इस चतुर्भुज के $\angle C$ और $\angle D$ ज्ञात कीजिए।

आकृति 12.41

2. दो वृत्त बिंदुओं P और Q पर प्रतिच्छेद करते हैं। इन दोनों वृत्तों के अंतर्गत क्रमशः दो चतुर्भुज APQD और PQCB बने हुए हैं, जैसा कि आकृति 12.42 में दर्शाया गया है। यदि $\angle A = 95°$ और $\angle D = 65°$ हो, तो निम्न के मान ज्ञात कीजिए :

   (i) x (ii) y (iii) z
   (iv) t (v) u (vi) v

आकृति 12.42

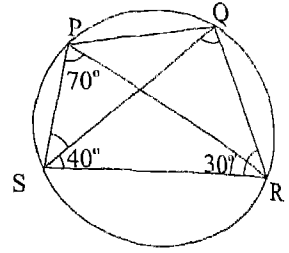
3. आकृति 12.43 में, $\angle ADE = 110°$ है। ज्ञात कीजिए :

   (i) $\angle ADC$
   (ii) $\angle ABC$

आकृति 12.43

4. आकृति 12.44 में, $\angle SPR = 70°$, $\angle RSQ = 40°$ और $\angle SRP = 30°$ है। ज्ञात कीजिए :

(i) $\angle PSQ$

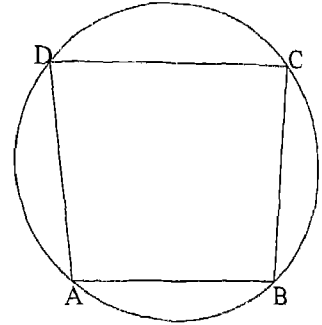
(ii) $\angle PQR$

(iii) $\angle QRS$

आकृति 12.44

5. ABCD एक चक्रीय समलंब है (ऐसा समलंब जिसके चारों शीर्ष एक वृत्त पर स्थित हों), जिसमें AB ∥ DC है (आकृति 12.45)। निम्न कथनों के लिए कारण दीजिए :

(i) $\angle A + \angle D = 180°$

(ii) $\angle B + \angle D = 180°$

(iii) $\angle A = \angle B$

आकृति 12.45

6. एक वृत्त के अंतर्गत एक समांतर चतुर्भुज ABCD बना हुआ है।

(i) क्या $\angle A = \angle C$ है? क्यों?

(ii) क्या $\angle A + \angle C = 180°$ है? क्यों?

(iii) क्या $\angle A = \angle C = 90°$ है? क्यों?

(iv) क्या $\angle B = \angle D = 90°$ है? क्यों?

(v) क्या ABCD एक आयत है? क्यों?

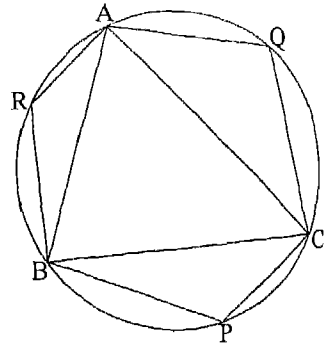
7. Δ ABC एक वृत्त के अंतर्गत बना हुआ है तथा बिंदु P, Q और R वृत्त पर आकृति 12.46 में दर्शाए अनुसार लिए गए हैं। ज्ञात कीजिए :

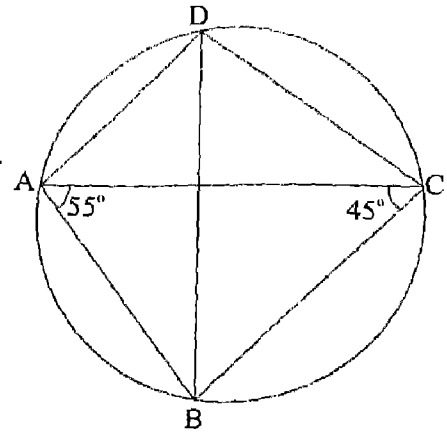
(i) $\angle P + \angle BAC$

(ii) $\angle Q + \angle ABC$

(iii) $\angle R + \angle ACB$

(iv) $\angle P + \angle Q + \angle R + \angle BAC + \angle ABC + \angle ACB$

(v) $\angle P + \angle Q + \angle R$

आकृति 12.46

अंतर्गत चतुर्भुज ABCD बना हुआ
12.47)। यदि $\angle BAC = 55°$ और
है, तो ज्ञात कीजिए :

आकृति 12.47

याद रखने योग्य बातें

, केंद्र से जीवा पर डाला गया लंब जीवा को समद्विभाजित करता है।

जीवा के मध्य-बिंदु को केंद्र से मिलाने वाली रेखा जीवा पर लंब होती है।

ान जीवाएँ केंद्र से समदूरस्थ होती हैं।

रस्थ जीवाएँ समान होती हैं।

ान जीवाएँ केंद्र पर समान कोण बनाती हैं।

जीवाएँ, जो केंद्र पर समान कोण बनाती हैं, समान होती हैं।

द्वारा वृत्त के केंद्र पर बनाया गया कोण उसके द्वारा वृत्त के शेष भाग
सी बिंदु पर बनाए गए कोण का दुगुना होता है।

वारा केंद्र पर बनाया गया कोण उस चाप का केंद्रीय कोण कहलाता है तथा
केंद्रीय कोण के संगत अंतःखंडित चाप कहलाता है।

जसके चारों शीर्ष एक वृत्त पर स्थित होते हैं एक चक्रीय चतुर्भुज कहलाता
ारों शीर्ष एकवृत्तीय या चक्रीय बिंदु कहलाते हैं।

ज के सम्मुख कोण संपूरक होते हैं।

अध्याय

13

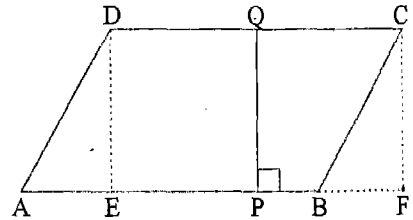
क्षेत्रफल

13.1 भूमिका

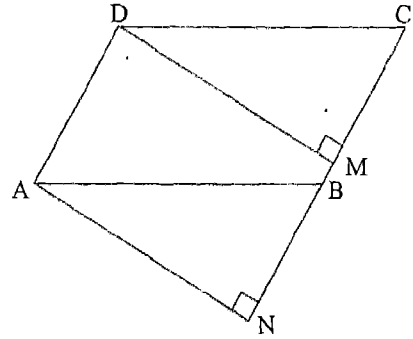
याद कीजिए कि तल में बनी आकृति को *समतल (plane)* आकृति कहते हैं। रेखाओं या वक्रों या दोनों से बनी समतल आकृति में यदि मुक्त सिरे न हों, तो इसे *संवृत* या बंद *(closed)* आकृति कहा जाता है। यदि यह आकृति अपने आप को न काटे, तो इसे *सरल (simple)* आकृति कहते हैं। केवल रेखाखंडों से बनी आकृति *सरल रेखात्मक या रेखीय* (rectilinear) कहलाती है। किसी सरल संवृत आकृति से घिरा तल का भाग *समतल क्षेत्र (plane region)* कहलाता है। समतल क्षेत्र का परिमाण इस क्षेत्र का *क्षेत्रफल (area)* कहलाता है।

आप पहले से ही जानते हैं कि वर्ग और आयत जैसी रेखीय आकृतियों के क्षेत्रफल कैसे ज्ञात किए जाते हैं। इस अध्याय में, हम कुछ और रेखीय आकृतियों, समांतर चतुर्भुज, त्रिभुज तथा समलंब (trapezium) का क्षेत्रफल ज्ञात करना सीखेंगे। हम वृत्त नामक एक अरेखीय आकृति का क्षेत्रफल निकालना भी सीखेंगे। वृत्त से आप परिचित ही हैं। जैसा कि आप जानते हैं, वृत्त मानव की सर्वाधिक महत्त्वपूर्ण खोंजों में से एक है। हमारे दैनिक जीवन में इसके व्यापक परिणाम हैं। हम वृत्त के व्यास और इसकी परिधि को जोड़ने वाला एक अति रोचक गुण भी प्राप्त करेंगे।

13.2 समांतर चतुर्भुज : पुनर्विलोकन

याद कीजिए कि समांतर चतुर्भुज चार रेखाखंडों (जो इसकी भुजाएँ कहलाती हैं) से बनी एक सरल बंद आकृति है जिसकी सम्मुख भुजाएँ समांतर होती है। आकृति 13.1 में एक समांतर चतुर्भुज ABCD दिखाया गया है। AB और DC इस समांतर चतुर्भुज की दो सम्मुख भुजाएँ हैं और AB ‖ DC है। उसी प्रकार, AD ‖ BC है।

आकृति 13.1

आइए, भुजा AB को आधार मानें। सामान्यतया, आधार को क्षैतिज और साथ ही इसके समांतर दूसरी भुजा के नीचे की ओर खींचा जाता है। एक रेखाखंड लीजिए जिसका एक सिरा P आधार पर और दूसरा सिरा Q आधार की सम्मुख भुजा पर हो। यदि PQ, AB पर लंब हो, तो PQ समांतर रेखाओं AB और DC के बीच की लघुतम दूरी या मात्र दूरी है। हम कहते हैं कि *PQ आधार AB के संगत, समांतर चतुर्भुज की ऊँचाई है।* ऊँचाई को ऊपर वाले शीर्षों में से किसी एक से आधार पर डाले गए लंब से दिखाने का प्रचलन है। इस प्रकार, AB को आधार लिए जाने पर ऊँचाई रेखाखंड DE या CF से दिखाई जा सकती है (आकृति 13.1) यद्यपि समांतर चतुर्भुज की किसी भी भुजा को आधार समझा जा सकता है।

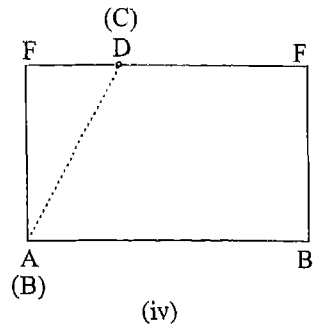
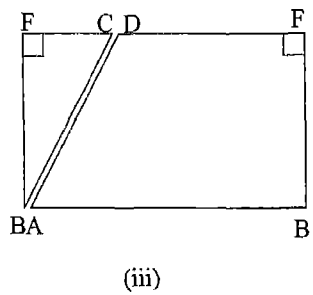
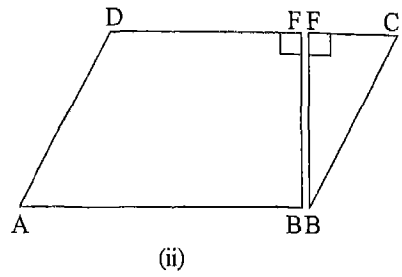
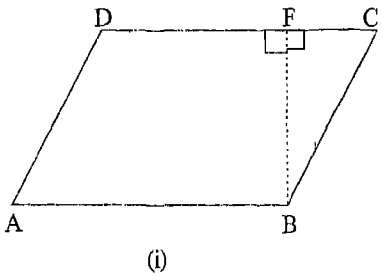
ध्यान दीजिए कि यदि आप समांतर भुजाओं के दूसरे जोड़े में से किसी एक भुजा को आधार बनाते हैं, तो समांतर चतुर्भुज की ऊँचाई बदल जाएगी। इस प्रकार, यदि आकृति 13.1 के समांतर चतुर्भुज में BC को आधार माना जाए, तो ऊँचाई AN या DM होगी (आकृति 13.2)।

आकृति 13.2

अध्याय के शेष भाग में, *आधार* शब्द का प्रयोग समांतर चतुर्भुज के आधार और आधार की लंबाई, दोनों के लिए किया जाएगा। साथ ही, समांतर चतुर्भुज की ऊँचाई दिखाने वाले रेखाखंड के लिए हम शब्द *शीर्षलंब* (*altitude*) का प्रयोग करेंगे। इस प्रकार, आकृति 13.1 में यदि AB और DC में से किसी एक को आधार माना जाए, तो DE और CF दो शीर्षलंब होंगे। सदा की भाँति, AB आदि का प्रयोग रेखाखंड AB के लिए और इसकी लंबाई के लिए भी किया जाएगा। आधार और ऊँचाई के संदर्भ में हम प्राय: *संगत* शब्द को छोड़ देंगे।

13.3 समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल

अब हम कागज काटने के एक ऐसे क्रियाकलाप का वर्णन करेंगे जिससे किसी दिए गए समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने में सहायता मिलेगी।

क्रियाकलाप 1 : मोटे कागज के एक टुकड़े पर कोई समांतर चतुर्भुज ABCD बनाइए। AB को आधार मानिए। एक शीर्षलंब BF खींचिए। तब $BF \perp DC$ जिससे कि कोण DFB

और कोण BFC दोनों समकोण हुए [आकृति 13.3 (i)] । BC, CF और FB के अनुदिश काटकर त्रिभुज BCF को अलग कर लीजिए [आकृति 13.3(ii)] । त्रिभुजाकार टुकड़े को उठाकर आकृति 13.3 (iii) में दिखाए अनुसार दूसरे टुकड़े के बाईं ओर रखिए। अब त्रिभुजाकार टुकड़े को दूसरे टुकड़े की ओर इतना सरकाइए कि BC, AD को पूर्णतया ढक ले (के संपाती हो जाए) [आकृति 13.3 (iv)] ।

आकृति 13.3

नया टुकड़ा समांतर चतुर्भुज के काटे गए टुकड़ों को आपस में बिना अतिव्यापन और बिना रिक्त स्थान छोड़े, जोड़कर बनाया गया है। अतः, दोनों टुकड़ों के क्षेत्रफल समान हैं। अब आकृति 13.3 (iv) में दिखाया गया अंतिम टुकड़ा स्पष्टतः भुजाओं AB और BF वाला एक आयत है। अब,

आयत का क्षेत्रफल = लंबाई × चौड़ाई

= AB × BF

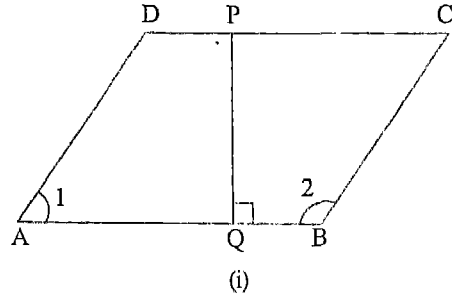
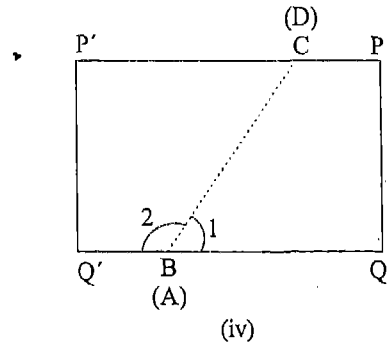
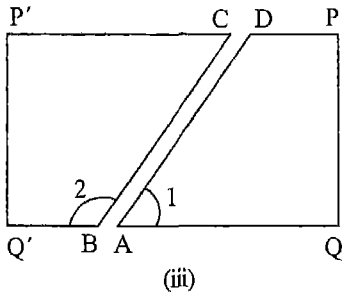
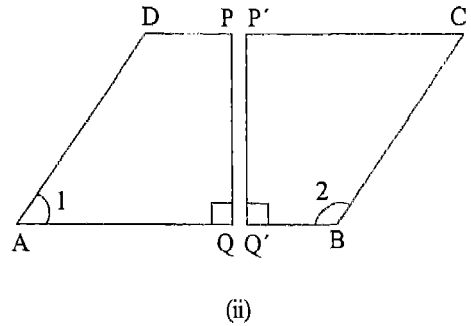
= समांतर चतुर्भुज ABCD का आधार × उसकी ऊँचाई

अतः, समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = AB × BF

= आधार × ऊँचाई

क्योंकि AB दिए गए समांतर चतुर्भुज का आधार और BF उसका शीर्षलंब या उसकी ऊँचाई है।

इस क्रियाकलाप को कई अन्य समांतर चतुर्भुजों पर दोहराइए और सत्यापित कीजिए कि प्रत्येक दशा में समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल उसके आधार और उसकी ऊँचाई के गुणनफल के बराबर होता है।

क्रियाकलाप 2 : एक समांतर चतुर्भुज ABCD खींचिए। समांतर चतुर्भुज की एक अक्स प्रतिलिपि बनाइए और एक कड़े कागज (या किसी पुराने ग्रीटिंग कार्ड) पर इसका अक्स खींचिए। DC पर एक बिंदु P लीजिए। AB पर लंब PQ खींचिए [आकृति 13.4(i)] । तब PQ दिए गए समांतर चतुर्भुज की ऊँचाई है।

कागज/कार्ड से समांतर चतुर्भुज को काट लीजिए और PQ के अनुदिश भी काट लीजिए। इससे दिया गया समांतर चतुर्भुज दो चतुर्भुजों AQPD तथा Q´BCP´ [आकृति 13.4 (ii)] में विभक्त हो जाता है। सीधे हाथ वाला टुकड़ा Q´BCP´ लेकर इसे दूसरे टुकड़े AQPD की बाईं ओर रखिए [आकृति 13.4 (iii)] । बायाँ टुकड़ा दाएँ टुकड़े की ओर इतना सरकाइए कि BC, AD के संपाती हो जाए [आकृति 13.4(iv)]।

आकृति 13.4

समांतर रेखाओं के गुणों से, ∠1 + 2 = 180° है। इस प्रकार, आकृति 13.4 (iv) में 1 तथा 2 एक रैखिक युग्म बनाते हैं। अतः, Q´BQ (या Q´AQ), अर्थात् Q´Q एक रेखा है।

यहाँ से एक आयत प्राप्त होता है जिसका आधार AB और जिसकी ऊँचाई PQ क्रमश: दिए हुए समांतर चतुर्भुज के आधार और उसकी ऊँचाई के बराबर हैं।

क्योंकि कोई अतिव्याप्ति नहीं हुई है और न ही कोई रिक्त स्थान छोड़े गए हैं, अत: दिए गए समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल वही है जो इस आयत का। परंतु हमें ज्ञात है कि किसी आयत का क्षेत्रफल उसकी लंबाई (आधार) और चौड़ाई (ऊँचाई) का गुणनफल होता है। यहाँ से, दिए गए समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल उसके आधार और उसकी ऊँचाई के गुणनफल के समान हुआ। इससे भी वही निष्कर्ष निकला जो ऊपर क्रियाकलाप 1 से निकला था।

यह परिणाम तर्कीय युक्तियों से भी सिद्ध किया जा सकता है। अत:, हमें निम्नलिखित सूत्र प्राप्त होते हैं :

I. समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई

II. समांतर चतुर्भुज का आधार = $\frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{ऊँचाई}}$

III समांतर चतुर्भुज की ऊँचाई = $\frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{आधार}}$

उदाहरण 1 : आधार 20 cm और संगत ऊँचाई 5 cm वाले समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का सूत्र है :

क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई

यहाँ, आधार = 20 cm और ऊँचाई = 5 cm है। अत:, क्षेत्रफल = 20 cm × 5 cm = 100 cm^2

उदाहरण 2 : भुजा 6.5 cm और शीर्षलंब 4 cm वाले एक समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : याद कीजिए कि समचतुर्भुज ऐसा समांतर चतुर्भुज होता है जिसकी सभी भुजाएँ बराबर होती हैं। अत:, समचतुर्भुज के क्षेत्रफल का सूत्र वही है जो समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का। अत:, समचतुर्भुज के क्षेत्रफल का सूत्र है :

क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई

यहाँ, आधार = भुजा = 6.5 cm और ऊँचाई = शीर्षलंब की लंबाई = 4 cm

अत:, समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = 6.5 cm × 4 cm = 26 cm^2

उदाहरण 3: क्षेत्रफल $400\,cm^2$ और ऊँचाई 8 cm वाले समांतर चतुर्भुज का आधार ज्ञात कीजिए।

हल: हम जानते हैं कि

$$\text{आधार} = \frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{ऊँचाई}}$$

यहाँ, क्षेत्रफल = $400\ cm^2$ और ऊँचाई = 8 cm

अतः, $\text{आधार} = \frac{400}{8}\ cm = 50\,cm$

प्रश्नावली 13.1

1. उस समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसका आधार 12 cm और संगत ऊँचाई 7 cm है।
2. उस समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसका आधार 12 dm और संगत ऊँचाई 5 dm है।
3. उस समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसका आधार 28.5 cm और संगत शीर्षलंब 10 cm है।
4. उस समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल वर्ग मीटरों में ज्ञात कीजिए जिसके आधार और शीर्षलंब निम्नलिखित हैं :

   (i) आधार = 12 dm, शीर्षलंब = 100 dm, (ii) आधार = 124 cm, शीर्षलंब = 10 dm

   (iii) आधार = 9 m, शीर्षलंब = 90 cm, (iv) आधार = 15 cm, शीर्षलंब = 9 cm
5. भुजा 6 cm और शीर्षलंब 4 cm वाले एक समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
6. भुजा 6.5 cm और शीर्षलंब 40 dm वाले एक समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
7. उस समांतर चतुर्भुज का शीर्षलंब ज्ञात कीजिए जिसकी एक भुजा 6.5 cm और जिसका क्षेत्रफल $26\ cm^2$ है।
8. उस समांतर चतुर्भुज का शीर्षलंब ज्ञात कीजिए जिसकी एक भुजा 10 cm और जिसका क्षेत्रफल $0.5\ m^2$ है।
9. क्षेत्रफल $390\,cm^2$ और ऊँचाई 26 cm वाले समांतर चतुर्भुज का आधार ज्ञात कीजिए।
10. उस समांतर चतुर्भुज का आधार ज्ञात कीजिए जिसका क्षेत्रफल $560\,m^2$ और जिसका शीर्षलंब 1400 cm है।
11. क्षेत्रफल $420\ cm^2$ और परिमाप 140 cm वाले समचतुर्भुज का शीर्षलंब ज्ञात कीजिए।

12. एक समांतर चतुर्भुज की दो भुजाएँ 20 cm और 25 cm हैं। यदि भुजा 25 cm के संगत शीर्षलंब 10 cm हो, तो दूसरी भुजा के संगत शीर्षलंब ज्ञात कीजिए।

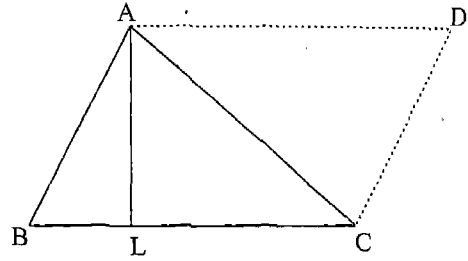
    [*संकेत :* पहले क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।]

13. एक समांतर चतुर्भुज के आधार और संगत शीर्षलंब क्रमशः 10 cm और 12 cm हैं। यदि दूसरा शीर्षलंब 8 cm हो, तो समांतर भुजाओं के दूसरे युग्म की भुजाओं की लंबाई ज्ञात कीजिए।

14. एक भवन के फर्श पर बने फूलदार डिज़ाइन में 2800 टाइलें हैं। प्रत्येक टाइल शीर्षलंब 3 cm और आधार 5 cm वाले समांतर चतुर्भुज के आकार की है। 50 पैसे प्रति dm^2 की दर से डिज़ाइन को पॉलिश करने का व्यय ज्ञात कीजिए।

13.4 त्रिभुज का क्षेत्रफल

अब कागज काटने का एक ऐसा क्रियाकलाप बताया जाएगा जिससे दिए गए किसी त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने में सहायता मिलेगी।

क्रियाकलाप 3 : एक त्रिभुज ABC बनाइए। माना कि AL आधार BC के संगत शीर्षलंब है (आकृति 13.5)। A और C से होकर क्रमशः BC और BA के समांतर रेखाएँ खींचिए जो बिंदु D पर मिलें।

आकृति 13.5

क्योंकि BA ‖ CD और AD ‖ BC है, अतः ABCD एक समांतर चतुर्भुज है। साथ ही, AL आधार BC के संगत एक शीर्षलंब है। यहाँ से,

समांतर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल $= BC \times AL$ (1)

अब रेखाखंडों AC, CD और DA के अनुदिश कागज को काटिए। इससे त्रिभुज CDA समांतर चतुर्भुज ABCD से अलग हो जाएगा। अब समांतर चतुर्भुज आरंभिक ABC बनकर रह जाता है। CDA को ABC पर इस प्रकार रखिए कि C तो A पर आए, A आए C पर और D, AC के उसी ओर हो जिस ओर B है। आप देखेंगे कि D वास्तव में B के ऊपर आता है। यदि निम्नलिखित तथ्यों पर ध्यान दें, तो यह बात आश्चर्यजनक नहीं लगेगी :

1. एकांतर कोण BAC और ACD बराबर हैं (BA ‖ CD और AC इन्हें काटती है।)। इसका अर्थ यह हुआ कि CD पड़ती है AB पर।

2. AB = DC है। इसका अर्थ यह कि D पड़ता है B पर। अब यह स्पष्ट हो जाता है कि Δ CDA, Δ ABC को ठीक पूरा-पूरा ढक लेता है। इसका अर्थ यह है कि दोनों त्रिभुजों के क्षेत्रफल बराबर हैं। क्योंकि समांतर चतुर्भुज केवल इन दो त्रिभुजों से ही बना हुआ है,

अत: समांतर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = Δ CDA का क्षेत्रफल + Δ ABC का क्षेत्रफल

= 2 × (Δ ABC का क्षेत्रफल)

(Δ ABC का क्षेत्रफल = Δ CDA का क्षेत्रफल)

या Δ ABC का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (समांतर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल)

= $\frac{1}{2}$ (BC × AL) [(1) से]

= $\frac{1}{2}$ $(b \times h)$,

जहाँ b, Δ ABC का आधार और h इसकी ऊँचाई या शीर्षलंब है। इस प्रकार, हमें निम्नलिखित सूत्र प्राप्त होते हैं :

I. त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (आधार) × (शीर्षलंब) = $\frac{1}{2}$ (आधार) × (ऊँचाई)

II. त्रिभुज का आधार = $\frac{2\times \text{क्षेत्रफल}}{\text{ऊँचाई}} = \frac{2\times \text{क्षेत्रफल}}{\text{शीर्षलंब}}$

III. त्रिभुज की ऊँचाई (शीर्षलंब) = $\frac{2\times \text{क्षेत्रफल}}{\text{आधार}}$

टिप्पणी : ध्यान दीजिए कि किसी त्रिभुज का क्षेत्रफल समान आधार और ऊँचाई वाले समांतर चतुर्भुज का आधा होता है।

उदाहरण 4 : आधार 24 cm और ऊँचाई 14 cm वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल निकालिए।

हल : त्रिभुज का क्षेत्रफल A होता है :

$$A = \frac{1}{2}(b \times h)$$

यहाँ $b = 24$ cm और $h = 14$ cm है।

अत:, $A = \frac{1}{2}(24 \times 14)\ \text{cm}^2 = 168\ \text{cm}^2$

उदाहरण 5 : आधार 80 cm ओर क्षेत्रफल 0.08 m^2 वाले त्रिभुज की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल : क्योंकि आधार cm में दिया गया है, अत: पहले हम क्षेत्रफल को भी cm^2 में बदल लेंगे। (हम आधार को भी m में बदल सकते थे, परंतु तब हमें दशमलवों में काम करना पड़ता।) अब,

$$1\ m^2 = 10000\ cm^2$$

अत:, $$0.08\ m^2 = 0.08 \times 10000\ cm^2 = 800\ cm^2$$

ऊपर के सूत्र III का प्रयोग करने पर,

$$\text{त्रिभुज की ऊँचाई} = \frac{2 \times \text{क्षेत्रफल}}{\text{आधार}} = \frac{2 \times 800}{80}\ cm = 20\ cm$$

उदाहरण 6 : विकर्णों 80 cm और 60 cm वाले एक समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : याद कीजिए कि समचतुर्भुज ऐसा समांतर चतुर्भुज होता है जिसके विकर्ण एक-दूसरे को समकोणों पर काटते हैं। आइए, समचतुर्भुज के शीर्षों को A, B, C और D कहें। विकर्णों के प्रतिच्छेद बिंदु को O कहिए (आकृति 13.6)। अब हम समचतुर्भुज को चार समकोण त्रिभुजों OBC, OCD, ODA और OAB से बना हुआ समझ सकते हैं।

आकृति 13.6

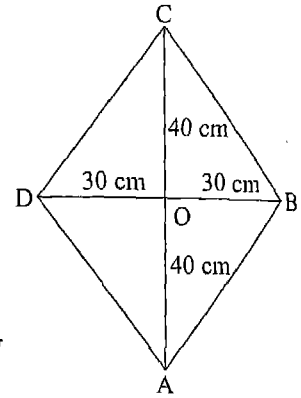
ध्यान दीजिए कि यदि हम समकोण त्रिभुज OBC में OB तथा OC में से एक को आधार मानें, तो दूसरा इसका शीर्षलंब होगा। अत:, इस त्रिभुज का क्षेत्रफल है :

$$\frac{1}{2} \times OB \times OC = \frac{1}{2} \times 30 \times 40\ cm^2 = 600\ cm^2$$

ध्यान दीजिए कि शेष तीन त्रिभुज क्षेत्रफल में इस त्रिभुज के समान हैं। अत:, दिए हुए समचतुर्भुज का क्षेत्रफल है :

$$4 \times 600\ cm^2 = 2400\ cm^2$$

उदाहरण 7 : उस समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी प्रत्येक भुजा 20 cm है।

हल: एक समबाहु त्रिभुज ABC लीजिए जिसमें AB = BC = CA = 20 (cm में) है। CD AB खींचिए जो AB को D पर मिले (आकृति 13.7)। तब D, AB का मध्य-बिंदु होगा।

$\therefore$ $AD = DB = 10$ (cm में)

चूँकि DBC एक समकोण त्रिभुज है, अतः पाइथागोरस प्रमेय द्वारा,

$$BC^2 = DB^2 + DC^2$$

या $20^2 = 10^2 + DC^2$

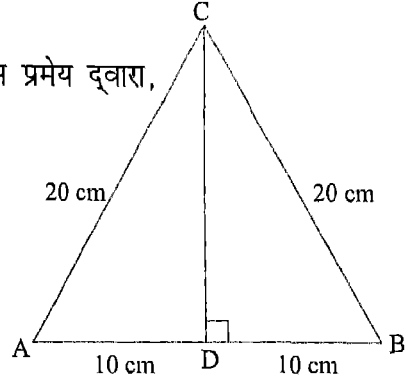
या $DC^2 = 400 - 100$

या $DC = \sqrt{300} = \sqrt{3 \times 100} = 10\sqrt{3}$

C
20 cm
20 cm
A
10 cm
D
10 cm
B

आकृति 13.7

अब, ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ आधार $\times$ ऊँचाई

$$= \frac{1}{2} \times 20 \times 10\sqrt{3}\ cm^2 = 100\sqrt{3}\ cm^2$$

प्रश्नावली 13.2

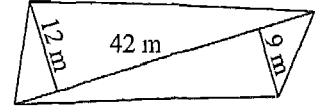
1. आधार 18 cm और संगत ऊँचाई 7 cm वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
2. आधार 120 dm और ऊँचाई 75 dm वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
3. आधार 24 cm और शीर्षलंब 1.5 dm वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
4. नीचे दिए गए आधार और शीर्षलंबों वाले त्रिभुजों के क्षेत्रफल वर्ग मीटरों में ज्ञात कीजिए :
   (i) आधार = 12 dm, शीर्षलंब = 10 dm (ii) आधार = 62 cm, शीर्षलंब = 50 cm
   (iii) आधार = 8 m, शीर्षलंब = 80 cm (iv) आधार = 1500 cm, शीर्षलंब = 90 dm
5. आधार 60 cm और क्षेत्रफल 600 cm^2 वाले त्रिभुज की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
6. क्षेत्रफल 65 cm^2 और आधार 13 cm वाले त्रिभुज की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
7. आधार 6.5 cm और क्षेत्रफल 26 cm^2 वाले त्रिभुज का शीर्षलंब ज्ञात कीजिए।
8. शीर्षलंब 10 cm और क्षेत्रफल 0.5 m^2 वाले त्रिभुज का आधार ज्ञात कीजिए।
9. क्षेत्रफल 3.9 m^2 और ऊँचाई 260 cm वाले त्रिभुज का आधार ज्ञात कीजिए।
10. उस समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल निकालिए जिसकी प्रत्येक भुजा 30 cm है।
11. भुजाओं 8 dm वाले समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
12. उस समद्विबाहु समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी समान भुजाओं की लंबाई 40 cm है।

13. समचतुर्भुज के आकार वाली उस टाइल का क्षेत्रफल निकालिए जिसके विकर्ण हैं:

(i) 24 cm और 10 cm (ii) 50 cm और 100 cm (iii) 20 cm और 28 cm

14. एक खेत का कर्ण 50 m और एक भुजा 40 m वाले समकोण त्रिभुज के आकार में है। इस खेत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

15. एक खेत त्रिभुजाकार है। यदि उसका क्षेत्रफल 2 ha हो और उसका आधार 200 m लंबा हो, तो उसका शीर्षलंब ज्ञात कीजिए। [*संकेत* : $1 \text{ ha} = 10000 \text{ m}^2$]

16. चतुर्भुज के आकार वाले किसी खेत के एक विकर्ण की लंबाई 42 m है। इस विकर्ण से अन्य दो शीर्षों की लांबिक दूरियाँ 12 m और 9 m हैं (आकृति 13.8)। इस खेत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

आकृति 13.8

17. Δ ABC का क्षेत्रफल P वर्ग मात्रक है।

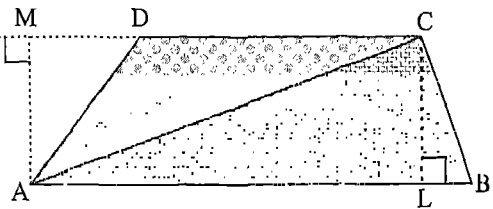
(i) D, AB का मध्य-बिंदु है। त्रिभुजों ADC और DBC के क्षेत्रफल निकालिए और दिखाइए कि दोनों बराबर हैं।

[*संकेत* : यदि आधार AB के संगत त्रिभुज ABC की ऊँचाई h हो, तो $P = \frac{1}{2} h \times AB$ होगा।]

(ii) बिंदु E और F, AB को तीन बराबर भागों में बाँटते हैं। त्रिभुजों AEC, EFC और FBC के क्षेत्रफल निकालिए और दिखाइए कि ये तीनों बराबर हैं।

(iii) बताइए कि किसी त्रिभुज ABC को समान क्षेत्रफल वाले n त्रिभुजों में कैसे विभक्त किया जा सकता है।

13.5 समलंब का क्षेत्रफल

याद कीजिए कि समलंब ऐसा चतुर्भुज होता है जिसकी दो सम्मुख भुजाएँ एक-दूसरे के समांतर होती हैं। आकृति 13.9 में, एक समलंब ABCD दिखाया गया है। भुजाएँ AB और DC समांतर हैं। इन समांतर भुजाओं में से किसी को भी समलंब का आधार माना जा सकता है। इन भुजाओं (आधारों) के बीच की दूरी समलंब की ऊँचाई या उसका शीर्षलंब होती है। आकृति 13.9 में, CL और AM दो शीर्षलंब हैं।

आकृति 13.9

आइए, विकर्ण AC खींचें। इससे समलंब दो त्रिभुजों ABC और ACD में बँट जाता है। आइए, आधारों AB और DC को क्रमशः b_1 और b_2 से व्यक्त करें और ऊँचाई को h कहें।

समलंब ABCD का क्षेत्रफल = Δ ABC का क्षेत्रफल + Δ ACD का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} AB \times CL + \frac{1}{2} DC \times AM$$

$$= \frac{1}{2} b_1 \times h + \frac{1}{2} b_2 \times h$$

$$= \frac{1}{2} h \times (b_1 + b_2)$$

अतः समलंब का क्षेत्रफल उसकी ऊँचाई और दोनों आधारों के योग के गुणनफल का आधा है। क्षेत्रफल को A से व्यक्त करने पर, हमें निम्नलिखित सूत्र प्राप्त होता है :

समलंब का क्षेत्रफल A = $\frac{1}{2} h \times (b_1 + b_2)$, जहाँ h ऊँचाई, और b_1, b_2 दोनों आधार हैं।

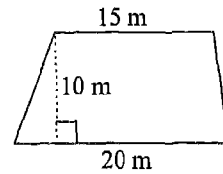
उदाहरण 8 : एक समलंब की समांतर भुजाएँ 20 m और 15 m लंबी हैं। इन भुजाओं के बीच की दूरी 10 m है। इस समलंब का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

आकृति 13.10

हल : समलंब का क्षेत्रफल होता है:

$$A = \frac{1}{2} h \times (b_1 + b_2)$$

यहाँ, $b_1 = 20$ m, $b_2 = 15$ m और $h = 10$ m है।

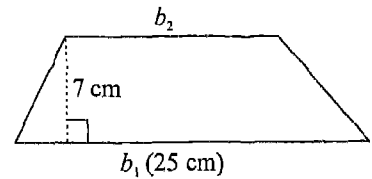
$$\therefore \quad A = \frac{1}{2} \times 10\,(20 + 15)\ m^2 = 175\ m^2$$

उदाहरण 9 : ऊँचाई 7 cm वाले एक समलंब का क्षेत्रफल 140 cm^2 है। यदि समांतर भुजाओं में से एक 25 cm हो, तो दूसरी समांतर भुजा ज्ञात कीजिए।

आकृति 13.11

हल : हम जानते हैं: $A = \frac{1}{2} h \times (b_1 + b_2)$

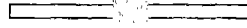
यहाँ, $A = 140\ cm^2$, $h = 7$ cm और $b_1 = 25$ cm है।

ऊपर के सूत्र में ये मान रखने पर,

$$140\ cm^2 = \frac{1}{2} \times 7\ cm \times (25\ cm + b_2)$$

या $\quad 40 \text{ cm} = 25 \text{ cm} + b_2$

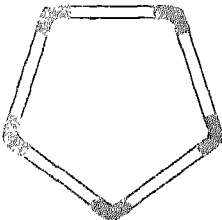
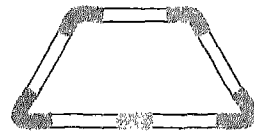
या $\quad b_2 = 15 \text{ cm}$

अतः दूसरी समांतर भुजा की लंबाई 15 cm है।

मित्रों के साथ मिलकर कीजिए **1 :** I. एक दियासलाई की डिबिया लीजिए। इसमें से कुछ तीलियाँ निकालकर उनके सिरों पर लगा फॉस्फोरसीय मसाला हटा दीजिए। साइकिलों की मरम्मत करने वाली दुकान से एक मीटर रबर नलिका (valve tube) खरीदकर ले आइए। नलिका को लगभग 1.5 cm लंबे छोटे-छोटे टुकड़ों में काट लीजिए। अब इनमें से एक टुकड़ा और दियासलाई की दो तीलियाँ लीजिए। अब नलिका के एक सिरे में एक तीली और दूसरे सिरे में दूसरी तीली इस प्रकार लगाइए कि दोनों तीलियाँ नलिका के भीतर एक-दूसरे को स्पर्श करे (आकृति 13.12)। यह दो तीलियों को जोड़ने की विधि है। अब पाँच तीलियाँ और चार टुकड़े नलिका के लीजिए। इनको आकृति 13.13 के अनुसार जोड़िए।

आकृति 13.12

आकृति 13.13

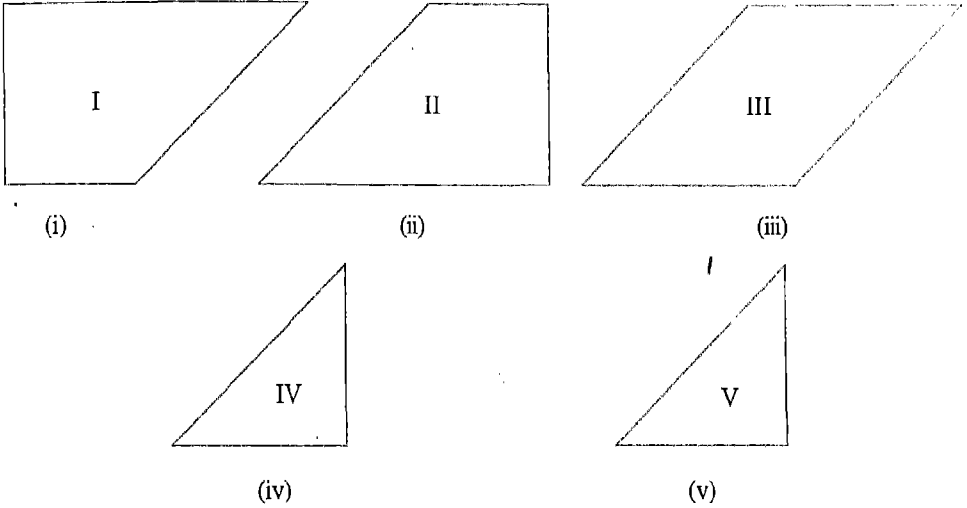
नलिका का एक और टुकड़ा लीजिए। ऊपर दिखाए गए सिरों A और B को नलिका के एक-एक सिरे में रखिए जिससे कि एक पाँच भुजाओं वाली आकृति (*पंचभुज*) [आकृति 13.14 (i)] बन जाए। अब जोड़ A-B पर थोड़ा दबाव डालकर आकृति को एक समलंब में रूपांतरित कीजिए [आकृति 13.14 (ii)]। एक तीली की लंबाई को एक मात्रक मानिए। (आप चाहें तो इस मात्रक को कोई अच्छा सा मनचाहा नाम भी दे सकते हैं।) आपने जो मात्रक लिया है उसके पदों में इस समलंब का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(i)

(ii)

आकृति 13.14

II. तीन तीलियाँ लेकर एक त्रिभुज बनाइए (आकृति 13.15)। क्या यह त्रिभुज समबाहु त्रिभुज है? अब 6 या 9 तीलियों से त्रिभुज बनाइए। क्या ये त्रिभुज समबाहु त्रिभुज है? इन त्रिभुजों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

आकृति 13.15

मित्रों के साथ मिलकर कीजिए 2 : आकृति 13.16 में, दो समलंब, दो समकोण त्रिभुज और एक समांतर चतुर्भुज, दिखाए गए हैं। इन आकृतियों की अक्स प्रतिलिपियाँ बनाइए। इनकी सहायता से, किसी गत्ते के टुकड़े (या एक पुराने ग्रीटिंग कार्ड) में से ये आकृतियाँ काट लीजिए।

आकृति 13.16

I. प्रत्येक आकृति का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

II. टुकड़ों को, बिना एक-दूसरे पर चढ़ाए और बीच-बीच में बिना खाली स्थान छोड़े, इस प्रकार रखिए कि अंग्रेजी भाषा का अक्षर 'T' (Capital) बन जाए। यदि आप इन टुकड़ों से 'T' न बना पाएँ, तो अध्याय के अंत में दी गई आकृति 13.28 देखें।

III. इन टुकड़ों से कुछ अन्य आकृतियाँ बनाने का प्रयास कीजिए।

प्रश्नावली 13.3

1. आधार 15 cm और ऊँचाई 8 cm वाले एक समलंब का क्षेत्रफल निकालिए, यदि दिए गए आधार के समांतर भुजा की लंबाई 9 cm हो।

2. समांतर भुजाओं 16 dm और 22 dm तथा ऊँचाई 12 dm वाले एक समलंब का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

3. आधारों 24 cm और 16.4 cm तथा शीर्षलंब 1.5 dm वाले एक समलंब का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

4. नीचे दिए गए आधारों और शीर्षलंब वाले समलंबों के क्षेत्रफल वर्ग मीटरों में निकालिए :

   (i) आधार = 12 dm और 20 dm, शीर्षलंब = 10 dm
   (ii) आधार = 28 cm और 3 dm, शीर्षलंब = 25 cm
   (iii) आधार = 8 m और 60 dm, शीर्षलंब = 40 dm
   (iv) आधार = 150 cm और 30 dm, शीर्षलंब = 9 dm

5. उस समलंब की ऊँचाई ज्ञात कीजिए जिसके आधारों की लंबाइयों का योग 60 cm है और जिसका क्षेत्रफल 600 cm^2 है।

6. उस समलंब का शीर्षलंब ज्ञात कीजिए जिसके आधारों की लंबाइयों का योग 6.5 cm है और जिसका क्षेत्रफल 26 cm^2 है।

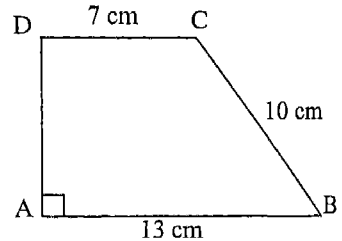
7. उस समलंब की ऊँचाई ज्ञात कीजिए जिसका क्षेत्रफल 65 cm^2 है और जिसके आधार 13 cm और 26 cm हैं।

8. उस समलंब के आधारों का योग ज्ञात कीजिए जिसका शीर्षलंब 11 cm है और क्षेत्रफल 0.55 m^2 है।

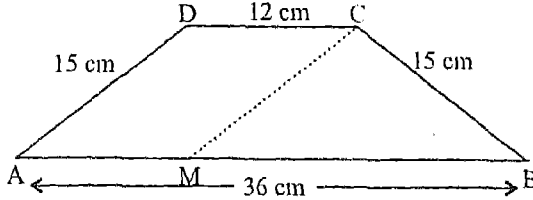
9. उस समलंब के आधारों का योग ज्ञात कीजिए जिसका क्षेत्रफल 4.2 m^2 है और जिसकी ऊँचाई 280 cm है।

10. एक समलंब का क्षेत्रफल 105 cm^2 है और उसकी ऊँचाई 7 cm है। समांतर भुजाओं में से एक यदि दूसरी से 6 cm अधिक लंबी हो, तो दोनों समांतर भुजाएँ ज्ञात कीजिए।

11. एक समलंब का क्षेत्रफ़ल 180 cm^2 है और उसकी ऊँचाई 12 cm है। यदि समांतर भुजाओं में से एक, दूसरी की दुगुनी हो, तो दोनों समांतर भुजाएँ ज्ञात कीजिए।

12. संलग्न आकृति 13.17 में, $AB \parallel DC$ और $DA \perp AB$ है। साथ ही, DC = 7 cm, CB = 10 cm और AB = 13 cm है। चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
[*संकेत :* C से AB पर लंब डालिए जो इसे M पर मिले। ΔCMB से CM ज्ञात कीजिए।]

आकृति 13.17

13. एक समलंब की समांतर भुजाएँ DC और AB क्रमश: 12 cm और 36 cm (आकृति 13.18) हैं। इसकी दोनों असमांतर भुजाओं में से प्रत्येक की लंबाई 15 cm है। समलंब का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

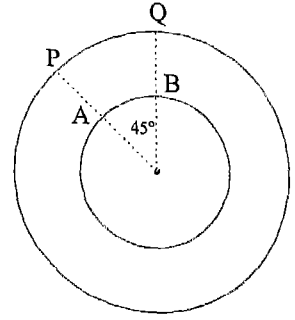
[*संकेत :* C से DA के समांतर एक रेखा खींचिए जो AB से M पर मिले। समद्विबाहु त्रिभुज CMB का शीर्षलंब ज्ञात कीजिए।]

आकृति 13.18

13.6 वृत्त की परिधि

चाँदी के एक आभूषण-निर्माता को एक दिए गए माप की 100 चाँदी की चूड़ियाँ बनानी है। उसे इस कार्य के लिए आवश्यक चाँदी का तार क्रय करना है। यह जानने के लिए कि कितने तार की आवश्यकता होगी, उसे चूड़ी की वृत्ताकार लंबाई ज्ञात करनी होगी। आप जानते ही हैं कि cm, dm, m या km जैसे किसी मानक मात्रक का प्रयोग कर सीधी लंबाइयों को कैसे मापा जाता है। परंतु क्या आप जानते हैं कि वृत्त के अनुदिश, जैसे कि ऊपर चूड़ी के संदर्भ में, लंबाई कैसे मापी जाती है? वृत्ताकार वस्तुएँ हमारे दैनिक जीवन में इतनी बहुलता से देखने को मिलती हैं कि वृत्त के अनुदिश लंबाई मापना एक महत्त्वपूर्ण समस्या है। जैसा कि आप जानते हैं, रेखीय आकृतियों में चारों ओर की लंबाई को उनका संगत परिमाप कहा जाता है। इसी प्रकार, हम वृत्त के अनुदिश लंबाई को उसका परिमाप कह सकते थे। परंतु वृत्त के परिमाप को एक विशेष नाम दिया गया है जिसे *परिधि* (*circumference*) कहते हैं।

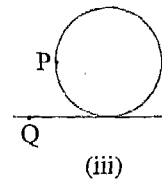
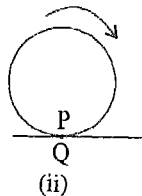
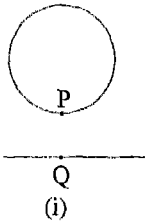
किसी वृत्त के अनुदिश लंबाई या उसके परिमाप को उसकी परिधि कहते हैं।

अब हम यह जानने का प्रयास करेंगे कि किसी वृत्त की परिधि कैसे मापी जाती है। बाद में, हम एक सूत्र प्राप्त करेंगे जिससे किसी दिए गए वृत्त की परिधि का एक सन्निकट (लगभग) मान निकाला जा सके। ध्यान दीजिए कि वृत्त को उसका सबसे बड़ा चाप माना जा सकता है। अत:, हम यदि चापों की लंबाइयाँ मापने की कोई विधि ज्ञात कर सकते तो हम परिधि भी ज्ञात कर सकते थे।

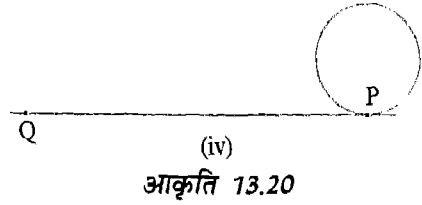
आप जानते हैं कि जैसे-जैसे वृत्त के किसी चाप द्वारा उसके केंद्र पर अंतरित (subtended) कोण में वृद्धि होती है, वैसे-वैसे ही चाप की लंबाई भी बढ़ती जाती है। आपको लगेगा कि इस तथ्य से हमें वृत्त की परिधि ज्ञात करने में सहायता मिलेगी। परंतु आकृति 13.19 को देखिए। इसमें एक ही केंद्र वाले दो वृत्त दिखाए गए हैं। छोटे वाले वृत्त का चाप AB केंद्र पर 45° का कोण अंतरित करता है। बड़े वृत्त का चाप PQ भी केंद्र पर 45° का कोण अंतरित करता है। परंतु स्पष्टतः ये दोनों चाप बराबर नहीं हैं। इस प्रकार, केवल केंद्र पर अंतरित कोण का ज्ञान हमें चाप को मापनें में, और इसलिए वृत्त की परिधि को मापने में भी, कोई सहायता नहीं दे सकता।

आकृति 13.19

यह अनुमान करने के लिए कि परिधि मापने में वास्तव में क्या सहायक हो सकता है, हम मापने के कुछ क्रियाकलाप करेंगे।

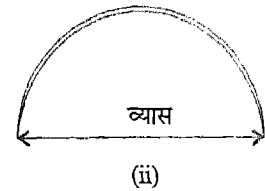
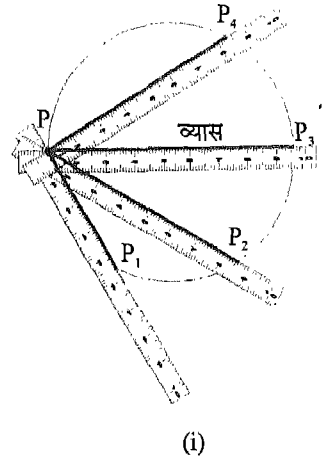
क्रियाकलाप 4 : एक वृत्त लीजिए। जैसा कि पहले भी कहा गया, हम इसे सीधी लंबाई की भाँति नहीं माप सकते। कागज के मोटे पन्ने पर या गत्ते के टुकड़े पर वृत्त की एक अक्स प्रतिलिपि बनाइए। कागज को वृत्त के अनुदिश काट लीजिए जिससे कि आपको एक चक्रिका (disc) प्राप्त हो जाए। इस चक्रिका के घेरे पर एक बिंदु P चिह्नित कीजिए। ध्यान दीजिए कि यह घेरा ही वास्तव में वृत्त है और इस घेरे के अनुदिश लंबाई ही इस वृत्त की परिधि है।

अब कागज के पन्ने पर एक रेखा खींचिए। इस पर एक बिंदु Q चिह्नित कीजिए [आकृति 13.20 (i)] । चक्रिका को ऊर्ध्वाधर पकड़िए और रेखा पर इस प्रकार रखिए कि बिंदु P बिंदु Q पर आए [आकृति 13.20 (ii)] । अब चक्रिका को रेखा पर दक्षिणावर्त (घड़ी की सूइयों के चलने की दिशा में) धीरे-धीरे इस प्रकार लुढ़काइए कि यह फिसले नहीं, बस घूमे [आकृति 13.20 (iii)] । लुढ़काने की क्रिया तब तक कीजिए जब तक कि बिंदु P पुनः रेखा पर न आ जाए [आकृति 13.20 (iv)] ।

आकृति 13.20

क्योंकि चक्रिका फिसली नहीं है, अत: इसके घेरे के अनुदिश दूरी QP या PQ के बराबर है। इस प्रकार, लंबाई QP या PQ ही दिए गए वृत्त की परिधि है।

आकृति 13.20

आप चक्रिका के घेरे के अनुदिश ठीक एक बार धागा लपेटकर और फिर प्रयुक्त धागे की लंबाई मापकर भी परिधि ज्ञात कर सकते थे। इस कार्य के लिए बोतलों के ढक्कन, बेलनाकार डिब्बे, बोतलों की गरदनें और लकड़ी की चक्रिकाएँ सुविधाजनक हो सकती हैं।

13.7 व्यास और परिधि में संबंध

आपने अनुभव किया होगा कि वृत्त की परिधि मापने की ऊपर बताई गई विधि कुछ जटिल है। अब हम एक अन्य क्रियाकलाप बताएँगे जिससे त्रिज्या या व्यास दिए होने पर, सीधे-सीधे परिधि के परिकलन के लिए सूत्र बनाने में सहायता मिलेगी। ज्ञात केंद्र वाला वृत्त दिया होने पर, केंद्र से होकर जाने वाली जीवा (जिसके सिरे वृत्त पर होंगे) वृत्त का व्यास होती है। यदि केंद्र ज्ञात न हो, तो आप व्यास को एक बड़ी-से-बड़ी जीवा के रूप में प्राप्त कर सकते हैं। संभवत: आप एक पटरी (ruler) को वृत्त के ऊपर सरकाने से प्राप्त विभिन्न जीवाओं की लंबाइयाँ देख-देख कर व्यास ज्ञात कर सकते थे [आकृति 13.21 (i)]। एक अधिक परिशुद्ध विधि यह होगी कि आप वृत्त की एक अक्स प्रतिलिपि बनाकर इसे बीच से इस प्रकार मोड़ें कि एक अर्धवृत्त प्राप्त हो जाए। इस अर्धवृत्त के दो सिरों के बीच की सीधी दूरी व्यास होगी [आकृति 13. 21 (ii)]।

आकृति 13.21

क्रियाकलाप 5 : अलग-अलग मापों की चार चक्रिकाएँ लीजिए। इनको P, Q, R और S कहिए। जैसा ऊपर बताया गया है, उस प्रकार प्रत्येक चक्रिका के व्यास (d) और परिधि (c) को माप लीजिए। अनुपात $\frac{c}{d}$ का दो दशमलव स्थानों तक शुद्ध परिकलन कर आगे दी गई

सारणी को भरिए :

चक्रिका	परिधि (c)	व्यास (d)	अनुपात $\left(\frac{c}{d}\right)$
P			
Q			
R			
S			

आप देखेंगे कि अंतिम स्तंभ में लिखे $\frac{c}{d}$ के मानों में यदि कोई अंतर है भी तो किंचित मात्र ही है। अब $\frac{c}{d}$ के चारों मानों का योग कर लीजिए। $\frac{c}{d}$ का माध्य मान निकालने के लिए (योगफल को) चार से भाग दीजिए। यह मानते हुए कि आपके माप और परिकलन किसी सीमा तक परिशुद्ध ही थे, माध्य मान, दशमलव के दो स्थानों तक शुद्ध, 3.14 होगा। यदि आप अन्य वृत्तों पर प्रयोग करेंगे तब भी यह परिणाम सत्य रहेगा। वास्तव में, आपने वृत्तों से संबद्ध निम्नलिखित दो महत्त्वपूर्ण परिणामों का सत्यापन किया है :

I. वृत्तों की परिधि (c) और उनके व्यासों (d) का अनुपात $\left(\frac{c}{d}\right)$ वही होता है, अर्थात् सभी वृत्तों के लिए अचर होता है।

II. किसी वृत्त की परिधि का उसके व्यास से अनुपात दो दशमलव स्थानों तक शुद्ध 3.14 होता है।

13.8 संख्या π

हमने अभी-अभी देखा कि किसी वृत्त की परिधि उसके व्यास से एक अचर अनुपात में होती है। इस अचर अनुपात को ग्रीक अक्षर π (pi) से व्यक्त करते हैं। इस अक्षर को *पाई* बोला जाता है। इस प्रकार, यदि c और d क्रमशः वृत्त की परिधि और उसके व्यास को व्यक्त करे, तो $\frac{c}{d} = \pi$ होता है। इस प्रकार, हमें निम्नलिखित संबंध प्राप्त होते हैं:

परिधि = $\pi \times$ व्यास अर्थात् $c = \pi d$ (I)

परिधि = $\pi \times 2 \times$ त्रिज्या = $2\pi \times$ त्रिज्या अर्थात् $c = 2\pi r$ (II)

I और II से हमें निम्न संबंध भी प्राप्त होते हैं :

$$d = \frac{c}{\pi} \text{ और } r = \frac{c}{2\pi} \qquad \text{(III)}$$

याद कीजिए कि 3.14, π का केवल एक सन्निकट मान है। इसलिए *सूत्र* I *अथवा* II *से परिकलित परिधि का मान भी एक सन्निकट मान ही है।* हम इस तथ्य की पुनरावृत्ति नहीं करेंगे किंतु आपको इसे कभी भूलना नहीं चाहिए। आप संभवत: सोच रहे होंगे कि π के दो दशमलव तक शुद्ध मान का प्रयोग करने की अपेक्षा इसका यथार्थ मान ज्ञात कर लेना अधिक अच्छा होगा। दुर्भाग्यवश, ऐसा संभव नहीं है। आप π का मान ट्रिलियन स्थानों तक क्यों न निकाल लें, यह तब भी सन्निकट मान ही रहेगा । आश्चर्य का कोई कारण नहीं! गणितज्ञों ने सिद्ध कर दिया है कि π परिमेय संख्या नहीं है। अत: इसे सांत (परिमित) अथवा असांत आवर्ती दशमलव के रूप में नहीं लिखा जा सकता।

π के विषय में इस तथ्य के कारण कुछ रोचक कार्य किए गए हैं। संपूर्ण विश्व में, व्यक्तियों ने प्रयास किया है कि वे अधिक-से-अधिक स्थानों तक π के मान का परिकलन करने में दूसरों को पराजित करें। सितंबर 1999 में टोक्यो विश्वविद्यालय के डॉ. कानादा (Kanada) ने π के 206,158,430,000 दशमलव अंकों का परिकलन किया। सितंबर 2002 में उन्होंने अपने दल के सहयोग से π के 1.2411 ट्रिलियन अंकों (पहले की तुलना में छ: गुने से भी अधिक) का परिकलन कर अपना ही विश्व-कीर्तिमान तोड़ डाला। कुछ व्यक्तियों को यह कार्य अनुपयोगी प्रतीत हो सकता है, परंतु एक नियत अवधि में एक समान विधि से π के अधिक-से-अधिक अंकों का परिकलन कराना विभिन्न कंप्यूटर की शक्ति के परीक्षण का माध्यम है। π के मान में एक सौ अस्सी दशमलव अंक (दशमलव बिंदु के बाद के अंक) नीचे दिए गए हैं :

1415926535	8979323846	2643383279	5028841971
6939937510	5820974944	5923078164	0628620899
8628034825	3421170679	8214808651	3282306647
0938446095	5058223172	5359408128	4811174502
8410270193	8521105559		

यहाँ से π के 3, 4, 5 और 6 दशमलव स्थानों तक शुद्ध मान क्रमश: हैं :

3.142, 3.1416, 3.14159 और 3.141593

प्राचीन काल के गणितज्ञों ने π के विभिन्न निकटतम मानों का प्रयोग किया। बेबीलोनियावासी π के अत्यंत स्थूल (rough) मान 3 का प्रयोग करते थे। आरंभिक यूनानी मान $\frac{22}{7}$ का प्रयोग करते थे। आर्किमिडीज़ (250 ईसा पूर्व के लगभग) ने सिद्ध किया कि π का मान $3\frac{1}{7}$ और $3\frac{10}{71}$ के बीच कुछ होता है। भारतीय गणितज्ञ आर्यभट (476 - 550) ने π का मान $\frac{62832}{20000}$ बताया, जो चार दशमलव स्थानों तक शुद्ध बैठता था। इससे पूर्व के सभी मान कम परिशुद्ध थे।

परिकलन में सुविधा की दृष्टि से जब तक अन्यथा न कहा जाए, हम π का मान $\frac{22}{7}$ लेंगे।

उदाहरण 10 : व्यास 35 cm वाले एक वृत्त की परिधि ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि $c = \pi d$ होता है।

यहाँ, $d = 35$ cm है। अत: $\pi = \frac{22}{7}$ लेने पर,

$$c = \frac{22}{7} \times 35 \text{ cm} = 110 \text{ cm}$$

अत:, वृत्त की परिधि 110 cm है।

उदाहरण 11 : साइकिल के उस पहिए की परिधि ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 3.7 dm है। ($\pi = 3.14$ लीजिए।)

हल : हम जानते हैं कि $c = 2\pi r$ होता है।

यहाँ, $r = 3.7$ dm है। $\pi = 3.14$ लेने पर,

$$c = 2 \times 3.14 \times 3.7 \text{ dm} = 23.236 \text{ dm}$$

अत:, साइकिल के पहिए की परिधि 23.236 dm है।

उदाहरण 12 : गारे के वृत्ताकार गड्ढे का व्यास ज्ञात कीजिए यदि उसकी परिधि 220 cm है।

हल : हम जानते हैं कि $d = \frac{c}{\pi}$ होता है। यहाँ, $c = 220$ cm है। $\pi = \frac{22}{7}$ लेने पर,

$$d = \frac{220}{\frac{22}{7}} \text{ cm} = \frac{220 \times 7}{22} \text{ cm} = 70 \text{ cm}$$

अर्थात्, गारे के गड्ढे का व्यास 70 cm है।

उदाहरण 13 : हमारे पास ठीक उतनी रस्सी है जो त्रिज्या 100 m वाले एक वृत्ताकार क्षेत्र को घेरने के लिए पर्याप्त है। दिखाइए कि उपर्युक्त रस्सी से केवल 7 मी अधिक लंबी रस्सी से 101 मी त्रिज्या वाले वृत्ताकार क्षेत्र को घेरा जा सकता है।

हल : आइए, पहले यह ज्ञात करें कि 100 m त्रिज्या वाले वृत्ताकार क्षेत्र को घेरने के लिए कितनी रस्सी की आवश्यकता है। सूत्र $c = 2\pi r$ से वांछित रस्सी की लंबाई $2\pi \times 100$ m हुई। इसका अर्थ हुआ कि हमारे पास 200π m लंबी रस्सी है।

इसी प्रकार, 101 m त्रिज्या वाले वृत्त को घेरने के लिए आवश्यक रस्सी की लंबाई $2\pi \times 101$ m या 202π m है।

दोनों रस्सियों की लंबाइयों में अंतर = 202π m – 200π m = 2π m या $\frac{44}{7}$ m जो 7 m से कम है। इस प्रकार, पहली रस्सी से 7 m अधिक लंबी रस्सी से हम बड़े वृत्त को घेर सकते हैं।

प्रश्नावली 13.4

जब तक कि अन्यथा न कहा जाए, $\pi = 3.14$ का प्रयोग तभी कीजिए जब मान दशमलव संख्याओं में दिए गए हों।

1. उस वृत्त की परिधि ज्ञात कीजिए जिसका व्यास है:
   (i) 14 cm (ii) 11 dm (iii) 20 m
2. उस वृत्त की परिधि ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या है:
   (i) 2.5 cm (ii) 1.50 dm (iii) 0.25 m
3. उस वृत्त का व्यास निकालिए जिसकी परिधि है:
   (i) 12.56 cm (ii) 88 dm (iii) 15.70 m
4. उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसकी परिधि है:
   (i) 6.28 cm (ii) 2200 dm (iii) 308 m
5. एक सिक्के का व्यास 2 cm है। उसकी परिधि ज्ञात कीजिए।
6. खाने की किसी प्लेट की परिधि 75.36 cm है। उसकी त्रिज्या ज्ञात कीजिए।
7. समान केंद्र वाले दो वृत्तों की त्रिज्याएँ 350 m और 490 m हैं। इनकी परिधियों में कितना अंतर है?
8. किसी साइकिल के पहिए का व्यास 70 cm है। ज्ञात कीजिए कि 110 m की दूरी तय करने में पहिया कितनी बार घूम जाएगा।

9. घास के मैदान में पानी की फुहार छोड़ने वाला यंत्र सभी दिशाओं में 7 m की दूरी तक पानी फेंकता है। भीगी घास के बाहरी घेरे की लंबाई ज्ञात कीजिए।

10. एक कोल्हू का बैल 3 m लंबी रस्सी से बँधा हुआ है। 14 चक्करों में वह कितनी दूरी तय करता है?.

11. पतले तार का एक वृत्ताकार टुकड़ा भुजा 6.25 cm वाले वर्ग में रूपांतरित किया जाता है। यदि इसकी लंबाई न कम हो और न अधिक, तो वृत्ताकार तार की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

12. दो पहियों की त्रिज्याओं में अनुपात 3:4 है। इनकी परिधियों में क्या अनुपात है?

13. पतले तार का एक टुकड़ा भुजा 31.4 dm वाले एक समबाहु त्रिभुज के आकार में है। तार में कमी हुए बिना, इसे एक छल्ले के आकार में मोड़ा गया है। छल्ले का व्यास ज्ञात कीजिए।

14. व्यास 150 cm वाले किसी कुँए के चारों ओर पत्थर की एक मेड़ बनी है। यदि इस मेड़ के बाहरी घेरे की लंबाई 660 cm हो, तो इस मेड़ की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

15. एक वृत्ताकार तालाब के अनुदिश 90 cm चौड़ी एक पटरी बनी हुई है। एक व्यक्ति पटरी के बाहरी किनारे के अनुदिश 66 cm लंबे डग भरता हुआ चल रहा है। 400 डगों में वह एक चक्कर पूरा कर लेता है। तालाब की त्रिज्या कितनी है?

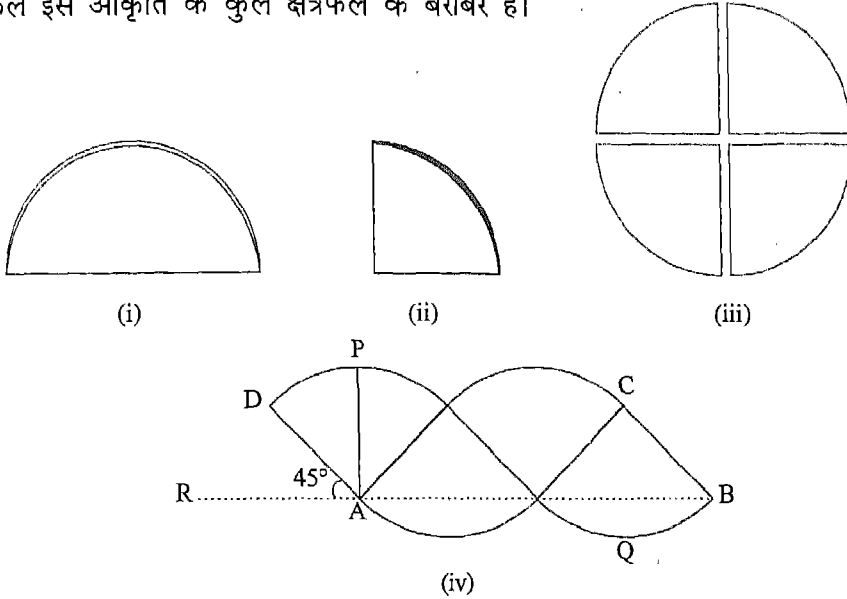
    [*संकेत :* तालाब की त्रिज्या = पटरी के बाहरी किनारे की त्रिज्या – पटरी की चौड़ाई]

16. चंद्रमा पृथ्वी से लगभग 384000 km दूर है। पृथ्वी के परितः चंद्रमा का परिपथ लगभग वृत्ताकार है। पृथ्वी के परितः एक पूरे चक्कर में चंद्रमा के परिपथ की परिधि ज्ञात कीजिए। [$\pi = 3.14$ लीजिए।]

17. पहली तीन विषम संख्याओं 1, 3 और 5 से बनी संख्या 113355 लीजिए। इसके प्रथम तीन अंकों (113) को हर और शेष तीन अंकों को अंश मानते हुए एक अन्य संख्या $\frac{355}{113}$ बनाइए। इस संख्या का दशमलव निरूपण कीजिए। इस दशमलव निरूपण का π से क्या संबंध है?

13.9 वृत्त का क्षेत्रफल

जैसा कि आप जानते हैं, वृत्त रेखीय आकृति नहीं है। किंतु यह एक सरल, संवृत, परिमित समतल आकृति है। अतः वृत्त में एक समतल क्षेत्र अंतर्निहित (घिरा) होता है। वृत्त में अंतर्निहित क्षेत्र के परिमाण को वृत्त का *क्षेत्रफल* कहते हैं। अब हम एक ऐसा क्रियाकलाप करेंगे जिससे हमें वृत्त के क्षेत्रफल के लिए एक सूत्र प्राप्त करने में सहायता मिलेगी।

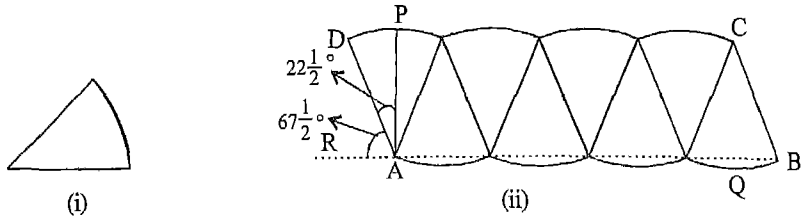
क्रियाकलाप 4 : एक अक्स कागज पर त्रिज्या r वाला कोई वृत्त खींचिए। वृत्त को काटकर एक चक्रिका प्राप्त कीजिए। इस चक्रिका के आधे भाग को शेष आधे भाग पर मोड़िए [आकृति 13.22 (i)] जिससे कि दोनों भाग एक-दूसरे पर संपाती हो जाएँ (को ठीक-ठीक ढक लें)। व्यास (जो प्राप्त अर्धवृत्तीय आकृति का सीधा किनारा है) के अनुदिश दबाकर मोड़ की रेखा प्राप्त कीजिए। पुनः मोड़कर वृत्त का चौथा भाग प्राप्त कीजिए [आकृति 13.22 (ii)]। किनारे वाली त्रिज्याओं पर दबाव डालकर मोड़ की रेखाएँ प्राप्त कीजिए। चक्रिका को खोलिए। मोड़ की रेखाओं पर काटकर चारों चतुर्थांशों को पृथक कीजिए [आकृति 13.22 (iii)] । इन चारों चतुर्थांशों को [आकृति 13.22 (iv)] के अनुसार रखिए। वृत्त का क्षेत्रफल इस आकृति के कुल क्षेत्रफल के बराबर है।

आकृति 13.22

ध्यान दीजिए कि :

(i) रेखाखंड AD और BC दोनों ही दिए गए वृत्त की त्रिज्या के बराबर हैं।

(ii) A और B के बीच के वक्ररेखीय (curvilinear) भाग की लंबाई परिधि की आधी और इसलिए, πr के बराबर है। इसी प्रकार, D और C के बीच का वक्ररेखीय भाग भी πr के बराबर है। P और D के बीच के वक्ररेखीय भाग की लंबाई चौथाई परिधि की आधी है। अतः, यह परिधि का आठवाँ भाग है।

(iii) $\angle PAD = 45^\circ$ और $\angle RAD = 45^\circ$ है।

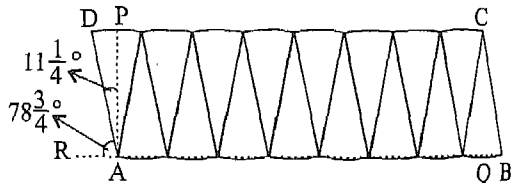
पुनः समान त्रिज्या वाला एक वृत्त लेकर पहले की भाँति इसे वृत्त के चतुर्थांश में मोड़ लीजिए। चतुर्थांश को मोड़कर वृत्त का अष्टांश (आठवाँ भाग) प्राप्त कीजिए। मोड़ की रेखा प्राप्त करने के लिए दबाइए [आकृति 13.23 (i)]। चक्रिका को खोलिए। मोड़ की रेखाओं पर काटकर आठों भाग अलग कर लीजिए। इनको आकृति 13.23 (ii) के अनुसार रखिए। वृत्त का क्षेत्रफल इस आकृति के कुल क्षेत्रफल के बराबर है।

आकृति 13.23

ध्यान दीजिए :

(i) रेखाखंड AD और BC दोनों ही दिए गए वृत्त की त्रिज्या के बराबर हैं।

(ii) A और B के बीच के वक्ररेखीय भाग की लंबाई परिधि की आधी और इसलिए, πr के बराबर है। इसी प्रकार, D और C के बीच का वक्ररेखीय भाग भी πr के बराबर है। P और D के बीच की वक्ररेखीय लंबाई घटकर परिधि के सोलहवें भाग के बराबर रह गई है। इस प्रकार, D अब P के अधिक निकट है। इसी प्रकार, अब B भी Q के अधिक निकट है। तात्पर्य यह है कि रेखाखंड DC और AB अपने-अपने बीच की वक्ररेखीय लंबाई (πr) के निकट आते जा रहे हैं।

(iii) $\angle PAD = 22\frac{1}{2}^\circ$ और $\angle RAD = 67\frac{1}{2}^\circ$ हो गया है। अतः, $\angle PAD$ घट रहा है और बढ़ रहा है।

पुनः समान त्रिज्या वाला एक वृत्त लेकर पहले की भाँति इसे वृत्त के सोलहवें भागों में मोड़ लीजिए। दबाव डालकर मोड़ की रेखा प्राप्त कीजिए। इन सोलह भागों को काटकर आकृति 13.24 की भाँति रखिए। वृत्त का क्षेत्रफल इस आकृति के कुल क्षेत्रफल के बराबर है।

आकृति 13.24

ध्यान दीजिए :

(i) रेखाखंड AD और BC दोनों ही दिए गए वृत्त की त्रिज्या के बराबर हैं।

(ii) पिछली स्थिति की तुलना में, D अब P के अधिक निकट है। इसी प्रकार, B भी अब Q के पहले से अधिक निकट है। तात्पर्य यह है कि DC और AB, πr के और निकट आते जा रहे हैं।

(iii) $\angle PAD = 11\frac{1}{4}°$ और $\angle RAD = 78\frac{3}{4}°$ हो गया है। इस प्रकार, $\angle PAD$ घटता जा रहा है और $\angle RAD$ बढ़ता ही जा रहा है।

ऊपर के प्रक्रम की पुनरावृत्ति कर, वृत्त को अधिकाधिक भागों में बाँटकर और भागों को आस-पास रखकर ऐसी आकृति प्राप्त की जा सकती है, जिसमें

(i) दो भुजाएँ (AD तथा BC) वृत्त की त्रिज्या के बराबर हैं।

(ii) AB और DC तथा में अंतर अत्यंत न्यून है।

(iii) $\angle PAD$ इतना छोटा है कि इसे शून्य माना जा सकता है। $\angle RAD$, 90^0 के इतने निकट है कि इसे 90^0 का कोण समझा जा सकता है।

फलस्वरूप, दिए गए वृत्त के टुकड़ों को आस-पास रखने पर प्राप्त होने वाली आकृति, लंबाई और चौड़ाई क्रमशः r और r वाले आयत ABCD के लगभग संपाती होती है। अतः, दिए गए वृत्त का क्षेत्रफल = टुकड़ों का कुल क्षेत्रफल = आयत ABCD का क्षेत्रफल

$$= \pi r \times r = \pi r^2$$

इस प्रकार, त्रिज्या r वाले वृत्त के क्षेत्रफल A के लिए, हमें निम्नलिखित सूत्र प्राप्त होता है:

$$A = \pi r^2 \text{ या वृत्त का क्षेत्रफल} = \pi\,(\text{त्रिज्या})^2$$

यहाँ से निम्नलिखित सूत्र भी प्राप्त होता है :

$$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} \quad \text{या त्रिज्या} = \sqrt{\frac{\text{क्षेत्रफल}}{\pi}}$$

टिप्पणी : ध्यान दीजिए कि ऊपर के सूत्रों से ज्ञात किए क्षेत्रफल A या त्रिज्या r के मान केवल सन्निकट मान होते हैं। क्योंकि π का मान कुछ भी क्यों न ले लिया जाए, यह एक सन्निकट मान ही होगा। इस तथ्य का उल्लेख हम पुनः-पुनः नहीं करेंगे। समस्त व्यावहारिक उद्देश्यों के लिए π का कोई सन्निकट मान पर्याप्त होता है। साथ ही, व्यापक रूप से हम शब्द सन्निकट का प्रयोग करेंगे ही नहीं और मात्र वाक्यांश *वृत्त का क्षेत्रफल* ही प्रयोग में लाएँगे।

उदाहरण 14 : त्रिज्या 1.20 cm वाले वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। [$\pi = 3.14$ लीजिए।]

हल : हम जानते हैं कि वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

यहाँ, $r = 1.20$ cm है। $\pi = 3.14$ लेने पर,

वृत्त का क्षेत्रफल $= 3.14 \times (1.20)^2$ cm^2 $= 4.52$ cm^2, दो दशमलव स्थान तक शुद्ध

अत:, वृत्त का वांछित क्षेत्रफल 4.52 cm^2 है।

उदाहरण 15 : क्षेत्रफल 5544 cm^2 वाले वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि वृत्त की त्रिज्या $= \sqrt{\dfrac{\text{क्षेत्रफल}}{\pi}}$

यहाँ, क्षेत्रफल $= 5544$ cm^2 है। $\pi = \dfrac{22}{7}$ लेते हुए,

$$\text{वृत्त की त्रिज्या (cm में)} = \sqrt{\frac{5544}{\frac{22}{7}}} = \sqrt{\frac{5544 \times 7}{22}} = \sqrt{252 \times 7}$$

$$= \sqrt{6 \times 6 \times 7 \times 7} = 42$$

इस प्रकार, वृत्त की त्रिज्या 42 cm है।

उदाहरण 16 : एक वृत्ताकार कालीन का व्यास 1.4 m है। यह मध्य में चितकबरा है और किनारे पर इसमें 20 cm चौड़ी धारीदार किनारी है (आकृति 13.25)। धारीदार किनारे वाले भाग का क्षेत्रफल निकटतम cm^2 तक ज्ञात कीजिए।

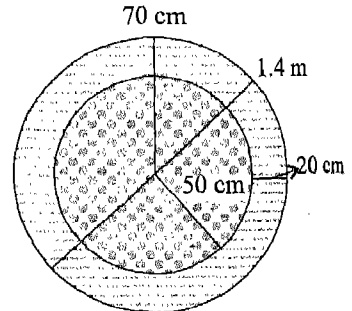
हल : कालीन की त्रिज्या = कालीन के व्यास का आधा $= \dfrac{1}{2} \times 1.4 \text{ m} = 0.7 \text{ m} = 70 \text{ cm}$

चितकबरे भाग की त्रिज्या = कालीन की त्रिज्या − धारीदार किनारी की चौड़ाई

$$= 70 \text{ cm} - 20 \text{ cm} = 50 \text{ cm}$$

अब कालीन का क्षेत्रफल $= \pi r^2 = \dfrac{22}{7} \times 70 \times 70 \text{ cm}^2$

$$= 15400 \text{ cm}^2$$

चितकबरे भाग का क्षेत्रफल $= \pi r^2 = \dfrac{22}{7} \times 50 \times 50 \text{ cm}^2$

आकृति 13.25

$$= \frac{55000}{7} \text{ cm}^2$$

$$= 7857 \text{ cm}^2 \text{ (निकटतम cm}^2 \text{ तक)}$$

अत:, धारीदार किनारी वाले भाग का क्षेत्रफल (निकटतम cm^2 तक)

= कालीन का क्षेत्रफल – चितकबरे भाग का क्षेत्रफल

$= 15400 \text{ cm}^2 - 7857 \text{ cm}^2 = 7543 \text{ cm}^2$

उदाहरण 17 : 880 cm परिधि वाले वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि परिधि c, संबंध $c = 2\pi r$ से प्राप्त होती है, जहाँ r त्रिज्या है।
यहाँ $c = 880$ cm, जिससे

$$880 = 2\pi r = 2 \times \frac{22}{7} \times r \qquad \left[\pi = \frac{22}{7} \text{ लेकर}\right]$$

या $$r = \frac{880 \times 7}{2 \times 22} = 140$$

अत:, दिए गए वृत्त की त्रिज्या 140 cm है। अब त्रिज्या r वाले वृत्त का क्षेत्रफल A है:

$$A = \pi r^2$$

$$= \frac{22}{7} \times 140^2 \text{ cm}^2$$

$$= 22 \times 140 \times 20 \text{ cm}^2$$

$$= \frac{22 \times 140 \times 20}{10000} \text{ m}^2 \qquad [\text{क्योंकि } 1\text{m}^2 = 10000 \text{ cm}^2]$$

$$= \frac{616}{100} \text{ m}^2 = 6.16 \text{ m}^2$$

इस प्रकार, दिए गए वृत्त का क्षेत्रफल 6.16 m^2 है।

टिप्पणी : प्राय: उत्तर को उन्हीं मात्रकों में लिखा जाता है जो प्रश्न में दिए गए हों। परंतु यदि संख्याएँ बड़ी हों, तो उत्तर को बड़े मात्रकों में बदला जा सकता है।

***मित्रों के साथ मिलकर कीजिए* 3 :** A पर समकोण वाला कोई समकोण त्रिभुज ABC बनाइए। भुजाओं AB, BC और CA पर अर्धवृत्त बनाइए (आकृति 13.26)।

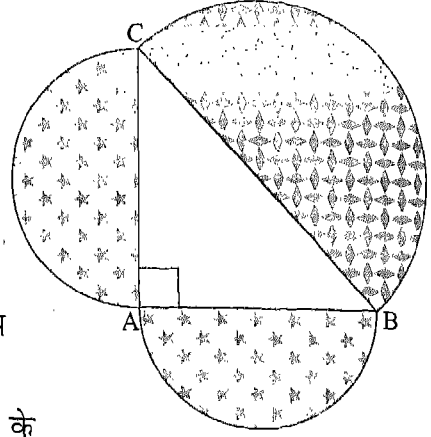
(i) AB और AC को आधार मानकर बने अर्धवृत्तों

(i) AB और AC को आधार मानकर बने अर्धवृत्तों के क्षेत्रफलों का योग निकालिए।

(ii) कर्ण पर बने अर्धवृत्त का क्षेत्रफल निकालिए।

(iii) ऊपर (i) और (ii) में क्या संबंध दिखाई देता है? यह क्रियाकलाप अन्य समकोण त्रिभुजों के लिए भी कीजिए।

(iv) अपने अवलोकित परिणाम को पाइथागोरस प्रमेय की भाँति अभिव्यक्त कीजिए।

(v) ऊपर जैसे क्रियाकलाप, (i) से (iv) तक, अर्धवृत्तों के स्थान पर समबाहु त्रिभुज लेकर कीजिए।

आकृति 13.26

प्रश्नावली 13.5

1. उस वृत्त का क्षेत्रफल निकालिए जिसकी त्रिज्या है:

   (i) 21 cm (ii) 49 dm (iii) 217 cm

2. उस वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसका व्यास है:

   (i) 20 cm (ii) 9.8 dm (iii) 200 cm

3. उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसका क्षेत्रफल है:

   (i) $154\ cm^2$ (ii) $616\ dm^2$ (iii) $12474\ cm^2$

4. उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसका क्षेत्रफल है:

   (i) $1386\ cm^2$ (ii) $\frac{2200}{7}\ dm^2$ (iii) cm^2

5. का मान 3.14 लेते हुए, उस वृत्त का व्यास ज्ञात कीजिए जिसका क्षेत्रफल है:

   (i) $314\ cm^2$ (ii) $7850\ dm^2$ (iii) $4710\ cm^2$

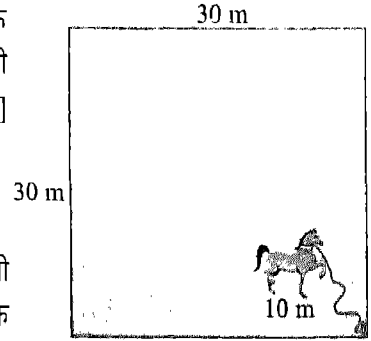
6. 10 cm व्यास वाली एक प्लेट का क्षेत्रफल निकालिए।

7. एक बैल किसी खंभे से 10 m लंबी रस्सी से बँधा हुआ है। बैल इस प्रकार चल रहा है कि रस्सी तनी हुई रहती है। रस्सी जितनी भूमि के ऊपर से जाती है, उस भूमि का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

8. एक उल्कापिंड एक गाँव के पास गिरता है। इसके गिरने से 200 m व्यास का एक वृत्ताकार गड्ढा बन जाता है। भूमि के प्रभावित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

9. किसी 30 m × 30 m वर्गाकार घास के मैदान के एक कोने में गड़े खंभे से कोई घोड़ा 10 m लंबी एक रस्सी से बँधा हुआ है (आकृति 13.27)। [$\pi = 3.14$ लीजिए।]

   (i) मैदान के उस भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसमें घोड़ा घास चर सकता है।

   (ii) यदि रस्सी 10 m लंबी होने के स्थान पर 20 m लंबी होती, तो यह ज्ञात कीजिए कि चरे जाने वाले भाग के क्षेत्रफल में कितनी वृद्धि होती।

आकृति 13.27

10. ऊपर के प्रश्न के भाग (i) में, यदि खंभा मैदान के एक किनारे (भुजा) के लगभग मध्य में गड़ा होता, तो क्षेत्रफल क्या होता?

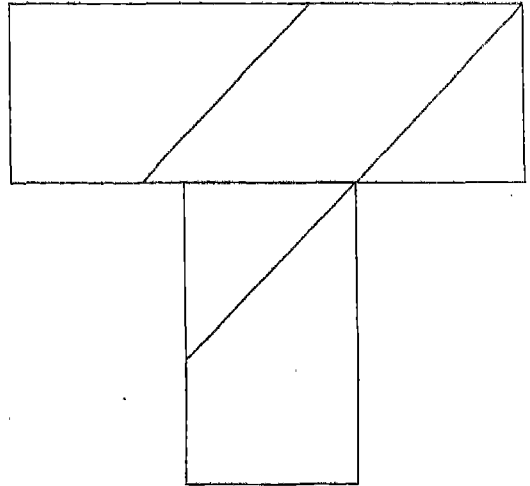
11. उस वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी परिधि भुजा 11 m वाले वर्ग के परिमाप के बराबर है।

12. 88 cm परिमाप वाले वर्ग और 88 cm परिधि वाले वृत्त में से किसका क्षेत्रफल अधिक है?

13. भुजाओं 30 cm और 40 cm वाली, धातु की एक आयताकार शीट में से जितनी बड़ी से बड़ी वृत्ताकार शीट काटी जा सकती थी, काट ली गई है। शेष शीट का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

14. 150 cm व्यास वाले एक कुएँ के चारों ओर 30 cm चौड़ी एक मेड़ बनी हुई है। मेड़ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

15. दो वृत्तों के क्षेत्रफल 25:36 के अनुपात में हैं। इनकी परिधियों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

16. एक वृत्त की त्रिज्या दुगुनी कर दी गई। प्राप्त वृत्त के क्षेत्रफल का दिए गए वृत्त के क्षेत्रफल से क्या अनुपात है?

आकृति 13.28

याद रखने योग्य बातें

1. किसी समतल क्षेत्र का परिमाण उसका क्षेत्रफल कहलाता है।
2. समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × शीर्षलंब (ऊँचाई) या $A = b \times h$
3. त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ आधार × शीर्षलंब (ऊँचाई) या $A = \frac{1}{2} b \times h$
4. समलंब का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ (आधारों का योग) × शीर्षलंब (ऊँचाई) या $A = \frac{1}{2}(b_1 + b_2) \times h$
5. वृत्त का परिमाप उसकी परिधि कहलाता है।
6. किसी वृत्त की परिधि (c) और उसके व्यास (d) का अनुपात $\frac{c}{d}$ सभी वृत्तों के लिए एक अचर संख्या होती है।
7. वृत्त की परिधि और उसके व्यास का अचर अनुपात $\frac{c}{d}$ यूनानी अक्षर π से व्यक्त किया जाता है। इस प्रकार, $\frac{c}{d} = \pi$ लिखा जाता है। दो दशमलव स्थानों तक π का शुद्ध मान 3.14 है।
8. संख्या π एक परिमेय संख्या नहीं है। π का एक बहु-प्रयुक्त परिमेय सन्निकट मान $\frac{22}{7}$ है।
9. वृत्त की परिधि $= 2\pi \times$ (त्रिज्या) या $c = 2\pi r$
10. वृत्त की परिधि $= \pi \times$ (व्यास) या $c = \pi d$
11. वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi \times$ (त्रिज्या)^2 या $A = \pi r^2$
12. वृत्त की त्रिज्या $= \sqrt{\text{क्षेत्रफल} \div \pi}$ या $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$

अध्याय

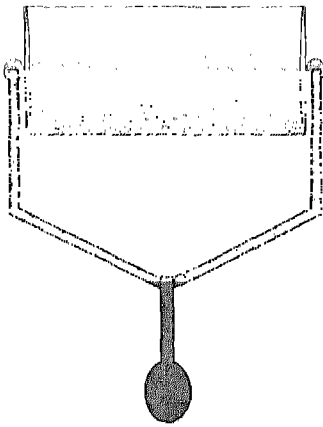
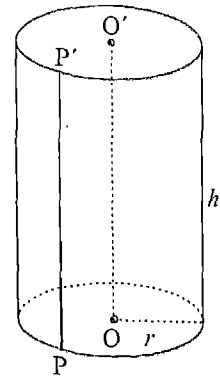
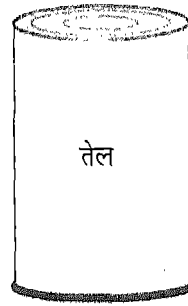
पृष्ठीय क्षेत्रफल

14.1 भूमिका

आप पृष्ठीय क्षेत्रफल की संकल्पना से अपनी पिछली कक्षाओं से ही परिचित हैं। कक्षा VII में, आप दो सरलतम त्रिविमीय आकृतियों (ठोस आकृतियों) घनाभों एवं घनों के पृष्ठीय क्षेत्रफलों के बारे में पढ़ चुके हैं। याद कीजिए कि लंबाई l, चौड़ाई b एवं ऊँचाई h मात्रकों वाले घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल $2(lb + bh + hl)$ वर्ग मात्रक होता है तथा भुजा (कोर) l मात्रक वाले घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल $6l^2$ वर्ग मात्रक होता है। इस अध्याय में, हम तीन सुपरिचित ठोस आकृतियों–बेलन, शंकु एवं गोले के पृष्ठीय क्षेत्रफलों के बारे में अध्ययन करेंगे। चूँकि इन ठोस वस्तुओं का पृष्ठ प्राय: वक्रीय होता है, इसलिए जब हम इनके पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करते हैं, तो कुछ कठिनाइयाँ आती हैं। इन कठिनाइयों को दूर करने के लिए, हम एक तुल्य समतलीय क्षेत्र ज्ञात करने का प्रयत्न करते हैं जो संबंधित वक्रीय पृष्ठों के क्षेत्रफल निकालने में सहायक होते हैं।

इन ठोसों के पृष्ठीय क्षेत्रफलों के सूत्र अति उपयोगी हैं, क्योंकि दैनिक जीवन में हमें बेलन, शंकु एवं गोले जैसी वस्तुएँ प्रत्येक स्थान पर मिल जाती हैं। इन सूत्रों में, संख्या π का उपयोग होता है। इस अध्याय में भी हम π का मान $\frac{22}{7}$ ही लेंगे, जब तक कि अन्यथा न कहा जाए।

14.2 लंब वृत्तीय बेलन

टीन का एक गोलाकार डिब्बा, सड़क (या बगीचे) को चौरस करने वाला रोलर (roller), गोल स्तंभ, तार (केबल), जल के पाइप इत्यादि (आकृति 14.1), दैनिक जीवन में मिलने वाली कुछ ऐसी वस्तुएँ हैं, जो हमारे मस्तिष्क में लंब वृत्तीय बेलन (right circular cylinder) की संकल्पना का सुझाव देती हैं, जो एक ज्यामितीय आकृति है।

आकृति 14.1 *आकृति 14.2*

आकृति 14.2 में, एक लंब वृत्तीय बेलन की रूप-रेखा दी गई है। यह हमें एक लंब वृत्तीय बेलन की उन ज्यामितीय पदों में व्याख्या करने में,सहायता करती है, जिनसे हम पहले से परिचित हैं।

लंब वृत्तीय बेलन के दो समतल सिरे हैं। प्रत्येक समतल सिरा वृत्तीय आकार का है, अर्थात् प्रत्येक सिरा एक वृत्तीय क्षेत्र है। ये दोनों वृत्तीय क्षेत्र परस्पर सर्वांगसम हैं और समांतर हैं। इनमें से प्रत्येक सिरा बेलन का एक *आधार (base)* कहलाता है। दोनों समतल सिरों के केंद्रों को जोड़ने वाला रेखाखंड OO′ बेलन की *अक्ष (axis)* कहलाती है। ध्यान दीजिए कि OO′ दोनों समतल सिरों में से प्रत्येक में स्थित सभी रेखाखंडों पर लंब है जो O या O′ से होकर जाते हैं। दूसरे शब्दों में, यह इन वृत्तीय सिरों (आधारों) पर *लंब* है। इसी कारण, हम इस आकृति को *लंब वृत्तीय बेलन (right circular cylinder)* कहते हैं।

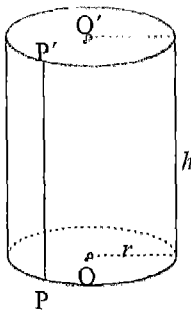
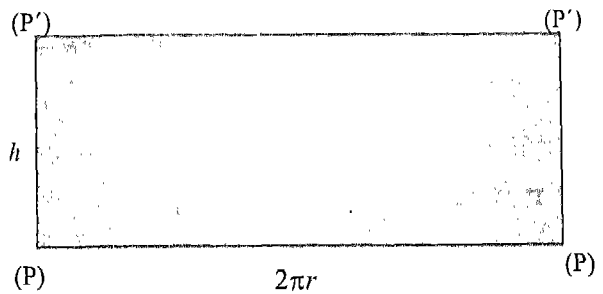
उपर्यक्त दोनों सिरों को मिलाने वाली एक *वक्र* (सपाट नहीं) पृष्ठ है और हम इसे लंब वृत्तीय बेलन की *पार्श्व* (या *पार्श्वीय) पृष्ठ (lateral surface)* कहते हैं। ध्यान दीजिए कि निचले सिरे (आधार) के वृत्त के प्रत्येक बिंदु P के लिए ऊपरी सिरे के वृत्त पर एक बिंदु P' ऐसा होता है कि PP' रेखाखंड OO' के समांतर है। जैसे-जैसे P निचले वृत्त के अनुदिश चलता है, रेखाखंड PP' बेलन की पार्श्व (या वक्र) पृष्ठ का निर्माण करता है। वृत्त (आधार) की *त्रिज्या* r तथा रेखाखंड OO' की लंबाई h वे दो लंबाइयाँ हैं जो बेलन की माप (size) का निर्धारण करती हैं। h बेलन की *ऊँचाई (height)* कहलाती है। ध्यान दीजिए कि PP' = OO' है।

टिप्पणी : लंब वृत्तीय बेलन की उपर्युक्त व्याख्या हमारे मस्तिष्क में दो भिन्न परंतु संबंधित आकृतियों का आभास कराती हैं। ये हैं: *खोखला बेलन* और *ठोस बेलन* वास्तव में, एक लंब वृत्तीय बेलन से हमारा आशय एक खोखले लंब वृत्तीय बेलन से होता है। यह त्रिविमीय आकाश (space) में बनी वह आकृति है जो बेलन की केवल पार्श्व पृष्ठ से बनती है। लंब वृत्तीय बेलन से आकाश के घिरे भाग को उस बेलन का *अभ्यंतर* (*interior*) कहते हैं। एक लंब वृत्तीय बेलन और उसका अभ्यंतर मिलकर एक *लंब वृत्तीय बेलनाकार क्षेत्र* कहलाता है, जिसे प्राय: एक *ठोस लंब वृत्तीय बेलन* कहा जाता है। सामान्य प्रयोग में, शब्द लंब वृत्तीय बेलन खोखले लंब वृत्तीय बेलन एवं ठोस लंब वृत्तीय बेलन दोनों के लिए ही प्रयोग किया जाता है। व्यावहारिक रूप से, इससे कोई कठिनाई नहीं होगी, क्योंकि यह संदर्भ से स्पष्ट हो जाएगा कि यह शब्द किस अर्थ में प्रयोग किया गया है।

साथ ही, जब तक कि अन्यथा न कहा जाए, हम प्राय: शब्द 'बेलन' का प्रयोग 'लंब वृत्तीय बेलन' के अर्थ में करेंगे।

14.3 लंब वृत्तीय बेलन का पृष्ठीय क्षेत्रफल

आइए अब एक बेलन के पृष्ठीय क्षेत्रफल को ज्ञात करने का प्रयत्न करें। इसके लिए, हम निम्नलिखित क्रियाकलाप करते हैं:

क्रियाकलाप 1 : आइए ऊँचाई h एवं आधार त्रिज्या r वाले एक लंब वृत्तीय बेलन को लें [आकृति 14.3 (i)] । इस प्रकार, बेलन के प्रत्येक सिरा त्रिज्या r वाला एक वृत्त है। ध्यान दीजिए कि प्रत्येक वृत्तीय किनारे की लंबाई $2\pi r$ है तथा प्रत्येक समतल सिरे का क्षेत्रफल πr^2 है।

आकृति 14.3

आइए अब पार्श्व (वक्र) पृष्ठ पर विचार करें। क्या इसका कोई क्षेत्रफल है? यदि हो, तो इसे कैसे ज्ञात करें। यदि वक्र पृष्ठ को किसी प्रकार सपाट, अर्थात् एक समतल क्षेत्र [आकृति 14.3 (ii)], बना लिया जाए, तो वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात करने में कोई कठिनाई नहीं होगी। हम निम्न प्रकार आगे बढ़ते हैं:

हम चौड़ाई h वाली कागज की एक पट्टी लेते हैं, ताकि हम इसे ऊँचाई h वाले बेलन के अनुदिश उसे ढकने के लिए लपेट सकें। वक्र पृष्ठ पर उसे निर्मित करने वाली एक रेखाखंड PP' को अंकित कीजिए। कागज की पट्टी के किनारे को अब PP' के अनुदिश रखिए और उसे मजबूती से पकड़े रहिए। अब पट्टी को बेलन के चारो ओर तब तक लपेटिए जब तक आप PP' पर दुबारा न पहुँच जाएँ। इस स्थिति में, पट्टी को PP' के अनुदिश काट लीजिए। अब कटी हुई पट्टी को हटाकर फैला लीजिए। [आकृति 14.3 (ii)] । आप क्या देखते हैं? यह कटी हुई पट्टी किस आकार की है? यह एक आयत है। इस आयत की चौड़ाई क्या है? स्पष्ट है, यह h है। इस आयत की लंबाई क्या है? ध्यान दीजिए कि इस आयत की लंबाई से बेलन के वृत्तीय सिरे के किनारे को ठीक एक बार लपेटा जा चुका है। साथ ही, वृत्तीय सिरे की त्रिज्या r है। इस प्रकार, आयत की लंबाई त्रिज्या r वाले वृत्त की परिधि के बराबर है। अर्थात्,

आयत की लंबाई $= 2\pi r$

अतः, आयत का क्षेत्रफल $= 2\pi r \times h = 2\pi rh$

यह सरलता से देखा जा सकता है कि

बेलन के वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल = लंबाई $2\pi r$ और चौड़ाई h वाले आयत का क्षेत्रफल $= 2\pi rh$

इस प्रकार, आधार त्रिज्या r और ऊँचाई h वाले बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi rh$

प्रत्येक सिरे का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

तथा संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi rh + \pi r^2 + \pi r^2 = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$

ध्यान दीजिए कि संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल एक ठोस बेलन का होता है।

टिप्पणी : इन सूत्रों की सत्यता की जाँच, हम एक कागज लेकर और उसे एक बेलन के रूप में मोड़कर भी कर सकते हैं।

अब हम इन सूत्रों का प्रयोग स्पष्ट करने के लिए, कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 1 : आधार त्रिज्या 3 cm और ऊँचाई 5 cm वाले एक लंब वृत्तीय बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ($\pi = 3.14$ लीजिए)।

हल : हमें प्राप्त है:

$$\text{वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल} = 2\pi rh = 2 \times 3.14 \times 3 \times 5 \text{ cm}^2$$
$$= 94.2 \text{ cm}^2$$

उदाहरण 2 : ऊँचाई 14 cm वाले एक लंब वृत्तीय बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 88 cm^2 है। बेलन के आधार की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल : हमें प्राप्त हैं :

$$\text{वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल} = 2\pi rh$$

अतः,
$$88 = 2 \times \frac{22}{7} \times r \times 14$$

या
$$r = \frac{88 \times 7}{2 \times 22 \times 14} = 1$$

इस प्रकार, बेलन के आधार की त्रिज्या 1cm है।

उदाहरण 3 : धातु की एक चादर से ऊँचाई 1 m और आधार व्यास 140 cm वाली एक बंद टंकी बनाई जानी है। इसके लिए कितने वर्ग मीटर धातु की चादर की आवश्यकता होगी?

हल : यहाँ, व्यास = 140 cm

$$\therefore \quad \text{त्रिज्या} = \frac{140}{2} \text{ cm} = 70 \text{ cm} = \frac{70}{100} \text{ m} = \frac{7}{10} \text{ m}$$

$$\text{ऊँचाई } h = 1 \text{ m}$$

$$\therefore \quad \text{टंकी का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल} = 2\pi r(h + r)$$
$$= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{10}\left(1 + \frac{7}{10}\right) \text{m}^2$$
$$= \frac{2 \times 22 \times 17}{100} \text{m}^2 = 7.48 \text{ m}^2$$

इस प्रकार, वांछित धातु की चादर का क्षेत्रफल 7.48 m^2 है।

उदाहरण 4 : धातु के एक पाइप की आंतरिक और बाहरी त्रिज्याएँ क्रमशः 3 cm और 3.5 cm हैं (आकृति 14.4)। यदि पाइप की लंबाई 56 cm है, तो उसका संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ($\pi = 3.14$ लीजिए)।

हल : पाइप का आंतरिक वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi rh = 2\pi \times 3 \times 56 \text{ cm}^2$ (1)

पाइप का बाहरी वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi \times 3.5 \times 56 \text{ cm}^2$ (2)

दोनों सिरों का क्षेत्रफल $= 2\pi [(3.5)^2 - (3)^2] \text{ cm}^2 = 2\pi \times 6.5 \times 0.5 \text{ cm}^2$ (3)

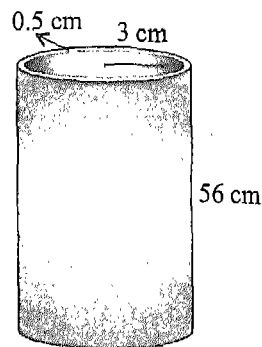
$\therefore$ संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= [(2\pi \times 3 \times 56) + (2\pi \times 3.5 \times 56) + (2\pi \times 6.5 \times 0.5)] \text{ cm}^2$

[(1), (2) और (3) से]

$= \pi (336 + 392 + 6.5) \text{ cm}^2$

$= \pi (734.5) \text{ cm}^2$

$= 3.14 \times 734.5 \text{ cm}^2$

$= 2306.33 \text{ cm}^2$

आकृति 14.4

प्रश्नावली 14.1

1. किसी लंब वृत्तीय बेलन की आधार त्रिज्या 8 cm और और ऊँचाई 35 cm है। बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

2. एक लंब वृत्तीय बेलन के आधार की परिधि 176 cm है। यदि बेलन की ऊँचाई 1m हो, तो उसका पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

3. एक बंद वृत्तीय बेलन के आधार का व्यास 10 cm है और ऊँचाई 15 cm है। बेलन का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ($\pi = 3.14$ लीजिए) ।

4. एक बंद लंब वृत्तीय बेलन के आधार की त्रिज्या 21 cm है और उसकी ऊँचाई 1m है। बेलन का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

5. किसी रोलर का व्यास 84 cm है और उसकी लंबाई 120 cm है। वह एक खेल के मैदान को ठीक एक बार समतल करने के लिए 500 संपूर्ण चक्कर लगाता है। खेल के मैदान का क्षेत्रफल m^2 में ज्ञात कीजिए।

   [*संकेत :* 1 चक्कर में रोलर द्वारा समतल किया गया क्षेत्रफल = रोलर का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल]

6. एक बेलनाकार स्तंभ का व्यास 50 cm है और उसकी ऊँचाई 3.5 m है। इस स्तंभ की वक्र पृष्ठ पर 12.50 रु प्रति m^2 की दर से सफेदी कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

7. 35 cm ऊँचाई वाले एक लंब वृत्तीय बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 121 cm^2 है। उसके आधार की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

8. एक लंब वृत्तीय बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 4.4 m^2 है। यदि इस बेलन के आधार की त्रिज्या 0.7 m है, तो उसकी ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

9. धातु का एक पाइप 77 cm लंबा है। इसके अनुप्रस्थ काट का आंतरिक व्यास 4 cm है तथा बाहरी व्यास 4.8 cm है। ज्ञात कीजिए, उसका

   (i) आंतरिक वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल (ii) बाहरी वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

   (iii) संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

10. एक वृत्ताकार कुएँ का आंतरिक व्यास 3.5 m है और वह 10 m गहरा है। ज्ञात कीजिए :

    (i) उसका आंतरिक वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

    (ii) 40 रु प्रति m^2 की दर से उसके आंतरिक वक्र पृष्ठ पर प्लास्तर कराने का व्यय

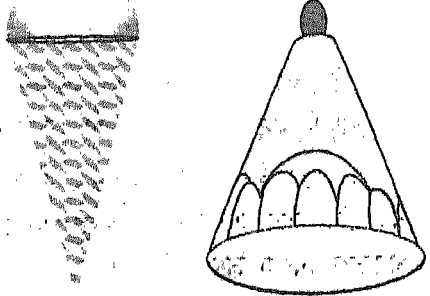
11. एक पाइप का बाहरी व्यास 1 m है और उसकी लंबाई 21 m है। ज्ञात कीजिए :

    (i) उसका बाहरी वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

    (ii) 25 रु प्रति m^2 की दर से उसके बाहरी वक्र पृष्ठ पर पेंट कराने का व्यय

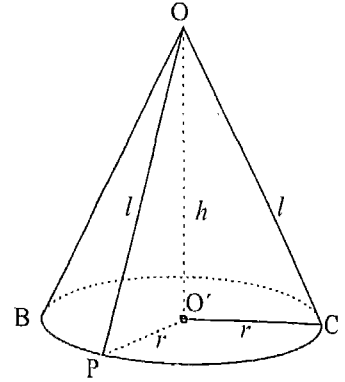
12. एक बेलनाकार बर्तन, जो ऊपर, से खुला है, का आधार व्यास 21 cm है और ऊँचाई 14 cm है। 5 रु प्रति 100 cm^2 की दर से उसके आंतरिक भाग पर टिन-प्लेटिंग कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

14.4 लंब वृत्तीय शंकु

एक आइसक्रीम शंकु, जोकर की टोपी, एक शंक्वाकार बर्तन, एक शंक्वाकार तंबू इत्यादि (आकृति 14.5) दैनिक जीवन में मिलने वाली कुछ ऐसी वस्तुएँ हैं, जो हमारे मस्तिष्क में लंब वृत्तीय शंकु (right circular cone) की संकल्पना का सुझाव देती हैं, जो एक ज्यामितीय आकृति है।

आकृति 14.5

आकृति 14.6 में, एक लंब वृत्तीय शंकु की रूप-रेखा दी गई है। यह हमें एक लंब वृत्तीय शंकु की उन ज्यामितीय पदों में व्याख्या करने में सहायता करती है, जिनसे हम पहले से ही परिचित हैं। इसे नीचे दिया जा रहा है :

आकृति 14.6

लंब वृत्तीय शंकु का एक *समतल सिरा* है, जो वृत्ताकार है, एक लंबवृत्तीय शंकु का समतल सिरा एक *वृत्तीय क्षेत्र* है। यह सिरा शंकु का *आधार* (*base*) कहलाता है। इस सिरे की त्रिज्या r बेलन के *आधार की त्रिज्या* या केवल *आधार त्रिज्या* (*base radius*) कहलाती है।

इसमें एक कोना (corner) भी है, जो शंकु का वह बिंदु है आकृति 14.6 में O जो उसके आधार से अधिकतम दूरी पर स्थित है। इसे शंकु का *शीर्ष* (*vertex*) कहते हैं। शीर्ष से आधार के वृत्तीय किनारे को मिलाने वाली एक *वक्र पृष्ठ* है। इसे *शंकु की पार्श्व या पार्श्वीय पृष्ठ* (*lateral surface*) भी कहते हैं।

यदि O शीर्ष है और O' आधार का केंद्र है, तो OO' शंकु की *अक्ष* (*axis*) कहलाती है तथा रेखाखंड OO' की लंबाई शंकु की *ऊँचाई* कहलाती है।

ध्यान दीजिए कि OO' आधार पर *लंब* है। इसी कारण, इस ठोस को एक *लंब वृत्तीय शंकु* (*right circular cone*) नाम दिया गया है।

बेलन की स्थिति की तरह, शंकु के आधार की त्रिज्या r तथा उसकी ऊँचाई h से शंकु की *माप* निर्धारित हो जाती है।

आप यह भी देख सकते हैं कि आधार के वृत्तीय किनारे पर स्थित प्रत्येक बिंदु P के लिए, रेखाखंड OP शंकु के वक्र पृष्ठ पर स्थित है। ऐसे रेखाखंडों OP में से प्रत्येक की लंबाई l शंकु की *तिर्यक ऊँचाई* (*slant height*) कहलाती है।

ध्यान दीजिए कि $\Delta OO'P$ एक समकोण त्रिभुज है जिसका समकोण शीर्ष O′ पर है (आकृति 14.6)।

अतः, हमें प्राप्त होता है:

$$l^2 = r^2 + h^2 \qquad \text{(पाइथागोरस प्रमेय से)}$$

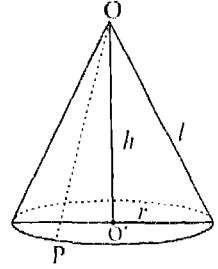
या $$l = \sqrt{r^2 + h^2}$$

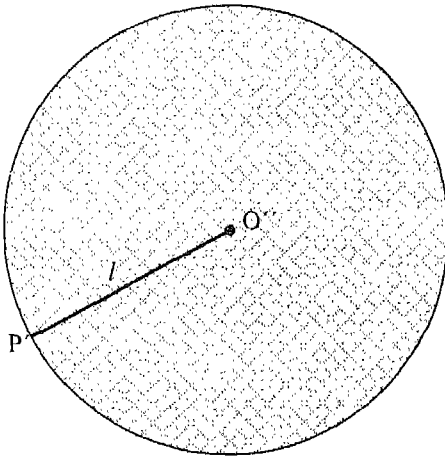
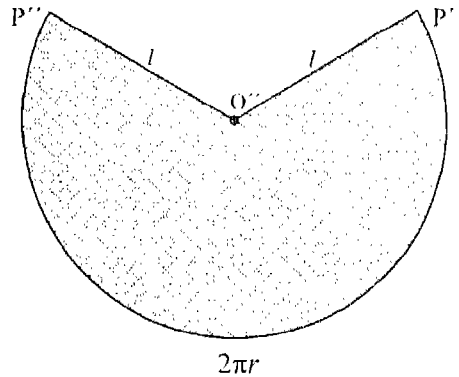
टिप्पणी : जैसा कि बेलन की स्थिति में था, लंब वृत्तीय शंकु की उपर्युक्त व्याख्या हमें दो भिन्न परंतु संबंधित आकृतियों का आभास कराती है। ये हैं : *खोखला शंकु* और *ठोस शंकु*। खोखला शंकु, शंकु की केवल पार्श्व पृष्ठ है, जबकि ठोस शंकु में पार्श्व पृष्ठ के अतिरिक्त शंकु का अभ्यंतर भी सम्मिलित होता है।

साथ ही, जब तक अन्यथा न कहा जाए, हम प्राय: शब्द 'शंकु' का प्रयोग 'लंब वृत्तीय शंकु' के अर्थ में करेंगे।

14.5 लंब वृत्तीय शंकु का पृष्ठीय क्षेत्रफल

आइए अब शंकु के पृष्ठीय क्षेत्रफल को निर्धारित करने का प्रयत्न करें। इसके लिए, हम निम्न क्रियाकलाप करते हैं:

क्रियाकलाप 2 : ऊँचाई h और आधार त्रिज्या r वाला एक लंब वृत्तीय शंकु लीजिए [आकृति 14.7 (i)]। स्पष्ट है कि वृत्तीय किनारे की लंबाई $2\pi r$ है तथा आधार का क्षेत्रफल πr^2 है।

आकृति 14.7 (i)

आइए अब पार्श्व पृष्ठ (वक्रपृष्ठ) पर विचार करें। क्या इसका कोई क्षेत्रफल है? इसे कैसे ज्ञात किया जाए? यदि किसी प्रकार वक्र पृष्ठ को सपाट, अर्थात् एक समतल क्षेत्र, बना लिया जाए, तो वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करने में कोई कठिनाई नहीं होगी। इसके लिए, हम अग्रलिखित प्रकार से आगे बढ़ते हैं :

आकृति 14.7 (ii)

आकृति 14.7 (iii)

मान लीजिए P वृत्तीय किनारे पर स्थित कोई बिंदु है। मान लीजिए $OP = l$ है। अब एक कागज पर केंद्र O" और त्रिज्या l लेकर एक वृत्त खींचिए [आकृति 14.7(ii)]। वृत्त के अनुदिश कागज को काट लीजिए। इस प्रकार, हमें केंद्र O″ केंद्र और त्रिज्या l वाली कागज की एक चकती (disc) प्राप्त होती है। इस चकती को त्रिज्या P′O″ के अनुदिश काटिए।

अब हम त्रिज्या O″P′ को OP के अनुदिश इस प्रकार रखते हैं कि O′′ बिंदु O पर तथा P′ बिंदु P पर पड़े। अब O′′ को O पर और P′ को P पर रखते हुए, हम चकती को शंकु के चारों ओर लपेटते हैं। जब हम OP पर वापिस पहुँचते हैं, तो हम चकती का शेष भाग काट देते हैं। इस प्रकार, हमें त्रिज्या l वाले वृत्तीय क्षेत्र का एक भाग प्राप्त होता है [आकृति 14.7 (iii)] जो शंकु की वक्र पृष्ठ को पूर्णतया ढक लेता है।

ध्यान दीजिए कि इस भाग के चाप की लंबाई वृत्तीय किनारे की लंबाई, अर्थात् $2\pi r$ के बराबर है। अब हम वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए ऐकिक विधि का प्रयोग करते हैं, जैसा कि नीचे दिखाया गया है :

जब चाप की लंबाई $2\pi l$ (अर्थात् चकती की परिधि) है, तो क्षेत्रफल $= \pi l^2$

$\therefore$ जब चाप की लंबाई $2\pi r$ है, तो क्षेत्रफल $= \dfrac{\pi l^2}{2\pi l} \times 2\pi r = \pi r l$

इस प्रकार, त्रिज्या l वाली चकती के उस भाग का क्षेत्रफल, जो शंकु के वक्र पृष्ठ को पूर्णतया ढक लेता है, $\pi r l$ है। अतः,

$$\text{शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल} = \pi r l$$

साथ ही, *संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + आधार का क्षेत्रफल*

$$= \pi r l + \pi r^2$$

$$= \pi r (l + r)$$

ध्यान दीजिए कि संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल एक ठोस शंकु का होता है।

टिप्पणी : उपर्युक्त सूत्रों की सत्यता की जाँच एक कागज का वृत्तीय क्षेत्र [आकृति 14.7 (iii)] लेकर और फिर उसे एक शंकु के रूप में मोड़कर भी की जा सकती है। अब हम इन सूत्रों का प्रयोग करने के लिए कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 5 : एक शंकु के आधार का व्यास 10.5 cm है और उसकी तिर्यक ऊँचाई 10 cm है। इस शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : आधार का व्यास = 10.5 cm

अतः, उसकी त्रिज्या $r = \frac{10.5}{2}$ cm

तिर्यक ऊँचाई $l = 10$ cm (दिया है)

अतः, वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi rl = \frac{22}{7} \times \frac{10.5}{2} \times 10 \text{ cm}^2$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{105}{20} \times 10 \text{ cm}^2 = 165 \text{ cm}^2$$

उदाहरण 6 : एक शंकु की ऊँचाई 16 cm तथा उसके आधार की त्रिज्या 12 cm है। इस शंकु के वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ($\pi = 3.14$ लीजिए)।

हल : यहाँ $h = 16$ cm और $r = 12$ cm है। मान लीजिए शंकु की तिर्यक ऊँचाई l है।

तब, $l^2 = r^2 + h^2$ से हम पाते हैं :

$$l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} \text{ cm} = 20 \text{ cm}$$

अतः, वृक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi rl = 3.14 \times 12 \times 20 \text{ cm}^2 = 753.6 \text{ cm}^2$

संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi rl + \pi r^2$

$$= 753.6 \text{ cm}^2 + 3.14 \times 144 \text{ cm}^2$$

$$= 753.6 \text{ cm}^2 + 452.16 \text{ cm}^2 = 1205.76 \text{ cm}^2$$

उदाहरण 7 : किसी शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 308 cm² और उसकी तिर्यक ऊँचाई 14 cm है। ज्ञात कीजिए: (i) आधार की त्रिज्या तथा (ii) उसका संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल।

हल : (i) हमें प्राप्त है :

$$\pi r l = 308$$

या $\frac{22}{7} \times r \times 14 = 308$

या $r = \frac{308 \times 7}{22 \times 14} = 7$

अतः, आधार की त्रिज्या 7 cm है।

(ii) संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi rl + \pi r^2 = (308 + \frac{22}{7} \times 49)\ \text{cm}^2 = (308 + 154)\ \text{cm}^2$

$= 462\ \text{cm}^2$

उदाहरण 8 : एक शंक्वाकार तंबू के आधार की त्रिज्या 12 m है और उसकी ऊँचाई 9 m है। यदि 1 वर्ग मीटर कैनवस का मूल्य 120 रु है, तो इस तंबू को बनाने में लगे कैनवस की लागत ज्ञात कीजिए ($\pi = 3.14$ लीजिए)।

हल: मान लीजिए शंकु की तिर्यक ऊँचाई l है। तब, $l^2 = r^2 + h^2$ से हमें प्राप्त होता है :

$l = \sqrt{144 + 81}\ \text{m} = 15\ \text{m}$

अत:, तंबू का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi rl = 3.14 \times 12 \times 15\ \text{m}^2$

$= 565.2\ \text{m}^2$

अत:, तंबू को बनाने के लिए आवश्यक कैनवस $= 565.2\ \text{m}^2$

$\therefore$ 120 रु प्रति m^2 की दर से कैनवस का मूल्य $= 120 \times 565.2$ रु $= 67824$ रु

प्रश्नावली 14.2

1. उस लंब वृत्तीय शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी तिर्यक ऊँचाई 10 cm है तथा आधार त्रिज्या 7 cm है।
2. एक लंब वृत्तीय शंकु के आधार का व्यास 14 cm है तथा उसकी तिर्यक ऊँचाई 9 cm है। ज्ञात कीजिए : (i) उसका वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल। (ii) उसका संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल।
3. एक शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि उसकी तिर्यक ऊँचाई 60 cm है तथा उसके आधार की त्रिज्या 25 cm है ($\pi = 3.14$ लीजिए)।
4. उस शंकु का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी तिर्यक ऊँचाई 9 dm है तथा आधार का व्यास 24 dm है।
5. एक शंकु के आधार की त्रिज्या 9 cm है और उसकी ऊँचाई 12 cm है। उस शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

   [*संकेत :* पहले तिर्यक ऊँचाई ज्ञात कीजिए।]
6. एक शंक्वाकार तंबू 10 m ऊँचा है और उसके आधार की त्रिज्या 24 m है। ज्ञात कीजिए :

   (i) तंबू की तिर्यक ऊँचाई।

(ii) तंबू को बनाने में लगे कैनवस का मूल्य, यदि 1 m^2 कैनवस का मूल्य 90 रु है।

7. एक लंब वृत्तीय शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 528 cm^2 है। यदि इस शंकु की तिर्यक ऊँचाई 21 cm है, तो ज्ञात कीजिए :

   (i) आधार की त्रिज्या (ii) उसका संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

8. ऊँचाई 8 m और आधार त्रिज्या 6 m वाले एक शंक्वाकार तंबू बनाने के लिए 3 m चौड़ाई वाली कितनी लंबी त्रिपाल लगेगी? ($\pi = 3.14$ लीजिए)।

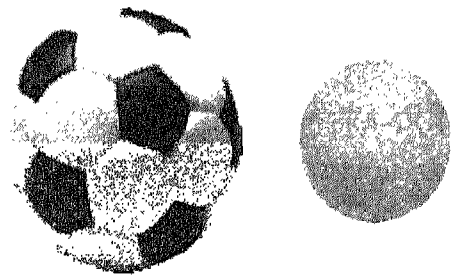
9. एक शंक्वाकार गुंबज की तिर्यक ऊँचाई और आधार व्यास क्रमशः 25 m और 14 m है। 210 रु प्रति 100 m^2 की दर से इसके वक्र पृष्ठ पर सफेदी कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

10. धातु से बनी एक खुली शंक्वाकार टंकी 4 m गहरी है तथा उसके ऊपरी वृत्तीय सिरे का व्यास 6 m है। इस टंकी को बनाने में लगी धातु की चादर का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ($\pi = 3.14$ लीजिए)।

11. एक जोकर की टोपी एक लंब वृत्तीय शंकु के आकार की है, जिसकी आधार त्रिज्या 7 cm तथा ऊँचाई 24 cm है। ऐसी 10 टोपियों के बनाने में लगे गत्ते का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

12. तिर्यक ऊँचाई 12 cm वाले एक आइसक्रीम शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 113.04 cm^2 है। इस शंकु की आधार त्रिज्या ज्ञात कीजिए ($\pi = 3.14$ लीजिए)।

14.6 गोला

एक फुटबाल, क्रिकेट की गेंद, एक कंचा, इत्यादि (आकृति 14.8) दैनिक जीवन में मिलने वाली कुछ ऐसी वस्तुएँ हैं जो हमारे मस्तिष्क में गोले (sphere) की संकल्पना का सुझाव देती हैं, जो एक ज्यामितीय आकृति है।

आकृति 14.8

आकृति 14.9 में, एक गोले की रूप-रेखा दी गई है। यह हमें एक गोले की उन ज्यामितीय पदों में व्याख्या करने में सहायता करती है जिनसे हम पहले से ही परिचित हैं। एक गोला वह आकृति है जो आकाश में उन सभी बिंदुओं से मिलकर बनी होती है

जो एक निश्चित बिंदु से समान दूरी पर स्थित होते हैं। वह निश्चित बिंदु (इस आकृति में बिंदु O) गोले का केंद्र (*centre*) कहलाता है तथा 'समान दूरी' गोले की *त्रिज्या* (*radius*) कहलाती है। वह रेखाखंड, जो गोले के केंद्र से होकर जाते हुए गोले पर स्थित इसके अंत बिंदुओं से मिले, गोले का *व्यास* (*diameter*) कहलाता है। वृत्त की ही तरह, गोले में भी व्यास की लंबाई को भी गोले का व्यास कहते हैं। यह स्पष्ट है कि गोले का व्यास d और त्रिज्या r में निम्न संबंध है :

$$d = 2r$$

गोले की त्रिज्या r से गोले की माप (size) पूर्णतया निर्धारित हो जाती है।

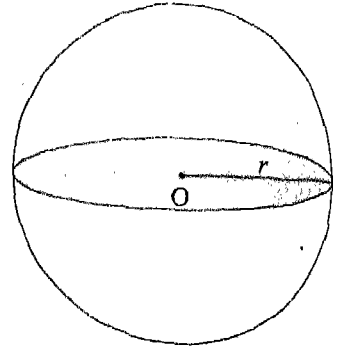
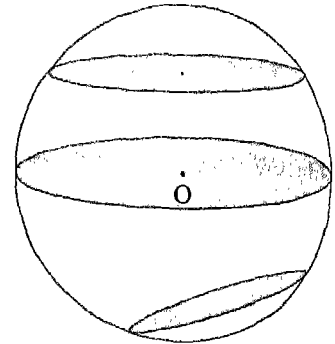
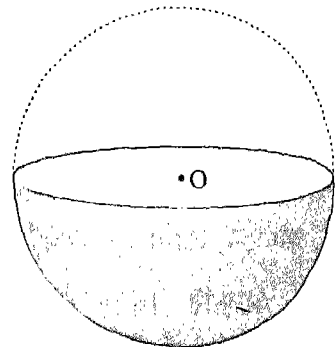
एक तल द्वारा गोले का कटा हुआ भाग (परिच्छेद) सदैव एक वृत्त होता है (आकृति 14.10)। केंद्र से होकर जाने वाले तल से गोले का सबसे बड़ा वृत्तीय परिच्छेद (भाग) प्राप्त होता है। इस सबसे बड़े परिच्छेद की त्रिज्या गोले की त्रिज्या के बराबर होती है। जैसे-जैसे हम केंद्र से दूर होते जाते हैं वृत्तीय परिच्छेद छोटा होता जाता है।

केंद्र से होकर जाने वाला तल गोले को दो बराबर भागों में विभाजित करता है। इनमें से प्रत्येक भाग एक *अर्धगोला* (*hemisphere*) कहलाता है (आकृति 14.11)।

आकृति 14.9

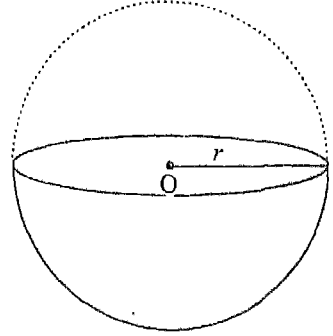
आकृति 14.10

आकृति 14.11

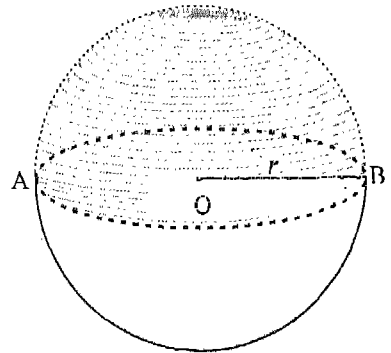
टिप्पणी : एक गोले की उपर्युक्त व्याख्या हमारे मस्तिष्क में दो भिन्न परंतु संबंधित आकृतियों *खोखला गोला* एवं *ठोस गोला* का सुझाव देती हैं। शब्द *गोले* से हमारा तात्पर्य खोखले गोले से होता है। यह वह आकृति होती है जो आकाश में स्थित उन सभी बिंदुओं से मिलकर बनती है जो एक निश्चित बिंदु (केंद्र) से एक दी हुई दूरी (त्रिज्या) पर स्थित होते हैं। ध्यान दीजिए कि गोले का केंद्र गोले का एक बिंदु

नहीं है। ठोस गोला आकाश में एक गोलाकार क्षेत्र (spherical region) होता है। इसमें गोले और उसका अभ्यंतर (अर्थात् उससे घिरा क्षेत्र) सम्मिलित होता है।

14.7 गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल

आइए अब एक गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल निर्धारित करने का प्रयत्न करें। इसके लिए, हम निम्नलिखित क्रियाकलाप करते हैं :

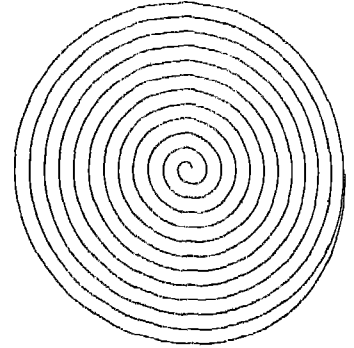
क्रियाकलाप 3 : केंद्र O और त्रिज्या r वाले एक गोले को लीजिए। मान लीजिए केंद्र O से होकर जाने वाला कोई तल इस गोले को दो अर्धगोलों में विभाजित करता है [आकृति 14.12 (i)]।

आकृति 14.12 (i)

आइए ऊपर वाले अर्धगोले की वक्र पृष्ठ पर विचार करें। क्या इसका कोई क्षेत्रफल है? यदि इस वक्र पृष्ठ को किसी प्रकार सपाट, अर्थात् एक समतल क्षेत्र के रूप में बना लिया जाए, तो इसमें कोई कठिनाई नहीं होगी। हम यह कार्य, बेलन एवं शंकु के लिए उनके चारो ओर कागज़ लपेटकर, सरलता से करने में समर्थ हो गए थे। परंतु यह कार्य यहाँ संभव नहीं है। इसलिए, यहाँ हम एक भिन्न प्रक्रिया अपनाते हैं, जैसा कि नीचे दिखाया गया है :

एक लंबी डोरी लीजिए। अर्धगोले के सबसे ऊपरी बिंदु से प्रारंभ करके, इस डोरी को अर्धगोले के चारो ओर एक सर्पिल (spiral) के रूप में लपेटिए [आकृति14.12 (ii)] । इसे तब तक जारी रखिए जब तक कि संपूर्ण अर्धगोला डोरी से ठक न जाए, (अर्धगोले की पृष्ठ पर गोंद का एक हल्का सा लेप डोरी को स्थिर रखने में सहायता कर सकता है)। अब अर्धगोले से डोरी को हटा लीजिए तथा इस लपेटी गई डोरी की लंबाई मापिए।

आकृति 14.12 (ii)

एक कागज पर त्रिज्या r (अर्थात गोले की त्रिज्या के बराबर त्रिज्या) का एक वृत्त खींचिए। आपको याद होगा कि इस वृत्त का क्षेत्रफल πr^2 है।

आकृति 14.12 (iii)

अब पहले बताई गई डोरी लपेटनी की प्रक्रिया को त्रिज्या r के खींचे गए वृत्त पर इसी प्रकार की डोरी लेकर दोहराइए [आकृति 14.12 (iii)]। आप वृत्त के केंद्र से डोरी लपेटना प्रारंभ करके उसके चारो ओर डोरी लपेट सकते हैं। अब वृत्त से डोरी को हटा लीजिए और इस डोरी की लंबाई मापिए जिसने पूरे वृत्त को ढक लिया था। आप क्या देखते हैं? आप देखेंगे कि अर्धगोले को ढकने में प्रयुक्त डोरी की लंबाई उस डोरी की लंबाई की लगभग *दुगुनी* है जो वृत्तीय क्षेत्र को ढकने में प्रयुक्त हुई है। इसमें बहुत कम अंतर जो आया है, वह लपेटने एवं ढकने में रह गए कुछ रिक्त स्थानों के कारण है। चूँकि दोनों स्थितियों में, डोरी की मोटाई बराबर है, इसलिए

अर्धगोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2 \times$ वृत्त का क्षेत्रफल $= 2\pi r^2$

अतः, गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2 \times$ अर्धगोले का क्षेत्रफल $= 2 \times 2\pi r^2 = 4\pi r^2$

क्रियाकलाप 4 : त्रिज्या r का एक गोला लीजिए। एक कागज से त्रिज्या r वाली चार वृत्ताकार चकतियाँ (discs) काट लीजिए। स्पष्ट है कि प्रत्येक चकती का क्षेत्रफल πr^2 है।

अब चारों चकतियों को छोटे-छोटे टुकड़ों में काट लीजिए तथा गोले के पृष्ठ को इन टुकड़ों से ढकने का प्रयत्न कीजिए। इन टुकड़ों को जितना संभव हो सके एक-दूसरे के समीप रखिए, ताकि उनके बीच में कोई रिक्तता न रहे। आप यदि आवश्यक हो, तो और अधिक टुकड़े कर सकते हैं। आप क्या देखते हैं? आप देखेंगे कि गोले के संपूर्ण पृष्ठ को ये चारों चकतियों के छोटे टुकड़े एक बार में पूरी तरह से ढक लेते हैं। शायद ही कोई बिना प्रयोग किया कोई टुकड़ा शेष रहेगा। इस प्रकार, हम पुनः कह सकते हैं कि

गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$, जहाँ r गोले की त्रिज्या है।

ध्यान दीजिए कि गोले की स्थिति में, वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल तथा संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल एक ही, अर्थात् $4\pi r^2$ होता है जहाँ, r गोले की त्रिज्या है। स्पष्ट है कि त्रिज्या r वाले अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $2\pi r^2$ है तथा इसका संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल है :

$2\pi r^2 + \pi r^2$ (आधार का क्षेत्रफल) अर्थात् $3\pi r^2$

ध्यान दीजिए कि संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ठोस अर्धगोले का होता है। आइए इन सूत्रों के प्रयोग को स्पष्ट करने के लिए कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 9 : एक गोले का व्यास 10 cm है। इसका पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ($\pi = 3.14$ लीजिए)।

हल : गोले की त्रिज्या $= \frac{1}{2} \times$ व्यास $= \frac{1}{2} \times 10 \text{ cm} = 5 \text{ cm}$

अतः, गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2 = 4 \times 3.14 \times 5^2 \text{ cm}^2 = 314 \text{ cm}^2$

उदाहरण 10 : एक ठोस अर्धगोले के पृष्ठ को उसके वृत्तीय आधार सहित पेंट किया जाना है। यदि अर्धगोले की त्रिज्या 28 cm है, तो इसके पृष्ठ को 3 रु प्रति 100 cm^2 की दर से पेंट कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

हल : अर्धगोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 3\pi r^2 = 3 \times \frac{22}{7} \times 28 \times 28 \text{ cm}^2$

$$= 7392 \text{ cm}^2$$

अतः, 3 रु प्रति 100 cm^2 की दर से उपर्युक्त पृष्ठ को पेंट कराने में आने वाला व्यय

$$= \frac{3}{100} \times 7392 \text{ रु} = 231.76 \text{ रु}$$

उदाहरण 11 : पृथ्वी को 6370 km त्रिज्या का एक गोला मानते हुए, ज्ञात कीजिए:

(i) पृथ्वी का पृष्ठीय क्षेत्रफल

(ii) भूमि का क्षेत्रफल, यदि पृथ्वी का $\frac{3}{4}$ पृष्ठ जल से ढका है

हल: (i) पृथ्वी का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

$$= 4 \times \frac{22}{7} \times 6370 \times 6370 \text{ km}^2$$

$$= 510109600 \text{ km}^2$$

(ii) पृथ्वी का $\frac{3}{4}$ पृष्ठ जल से ढका है।

अतः, भूमि का क्षेत्रफल $= \frac{1}{4} \times$ (पृथ्वी का पृष्ठीय क्षेत्रफल) $= \frac{1}{4} \times 510109600 \text{ km}^2$

$$= 127527400 \text{ km}^2$$

प्रश्नावली 14.3

1. उस गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसका व्यास है :

   (i) 14 cm (ii) 21 cm (iii) 3.5 m

2. उस गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या है :

   (i) 10.5 cm (ii) 5.6 m (iii) 14 cm

3. एक गोलाकार गुब्बारे में हवा भरे जाने पर उसकी त्रिज्या 7 cm से बढ़कर 14 cm हो जाती है। इन दोनों स्थितियों में, गुब्बारे के पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

4. पीतल से बने एक अर्धगोलाकार कटोरे का आंतरिक व्यास 10.5 cm है। 16 रु प्रति 100 cm^2 की दर से इसकी आंतरिक पृष्ठ पर कलई कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

5. किसी भवन का गुंबज एक अर्धगोले के आकार का है। उसकी त्रिज्या 6.3 m है। 12 रु प्रति m^2 की दर से इस पर पेंट कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

6. उस गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसका पृष्ठीय क्षेत्रफल 154 cm^2 है।

7. चंद्रमा का व्यास पृथ्वी के व्यास का लगभग एक चौथाई है। उनके पृष्ठीय क्षेत्रफलों के अनुपात ज्ञात कीजिए।

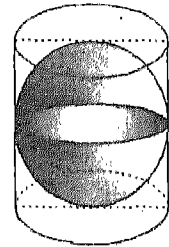
8. एक गोला फेंक (shotput) की त्रिज्या 7 cm है। उसका पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

9. एक अर्धगोलाकार कटोरा 0.25 cm मोटी स्टील का बना हुआ है। इस कटोरे की आंतरिक त्रिज्या 5 cm है। इस कटोरे की बाहरी पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

10. त्रिज्या r का एक गोला एक लंब वृत्तीय बेलन के अंतर्गत है (आकृति 14.13)। ज्ञात कीजिए :

    (i) गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल

    (ii) बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

    (iii) उपर्युक्त (i) और (ii) में प्राप्त क्षेत्रफलों का अनुपात

आकृति 14.13

याद रखने योग्य बातें

[r, h और l का जहाँ भी प्रयोग किया गया है वह सामान्य अर्थों में है।]

1. एक लंब वृत्तीय बेलन का प्रत्येक समतल सिरा उसका आधार कहलाता है।
2. बेलन के दोनों वृत्तीय सिरों के केंद्रों को मिलाने वाला रेखाखंड उसकी अक्ष कहलाती है। इस अक्ष की लंबाई बेलन की ऊँचाई कहलाती है।
3. वह वक्र पृष्ठ जो एक लंबवृत्तीय बेलन के दोनों आधारों को मिलाती है उसकी पार्श्व पृष्ठ कहलाती है।
4. एक लंब वृत्तीय बेलन का पार्श्व पृष्ठीय या वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi rh$
5. एक लंब वृत्तीय बेलन का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r\,(r + h)$
6. एक लंब वृत्तीय शंकु का समतल सिरा उसका आधार कहलाता है। शंकु का एक मात्र कोना उसका शीर्ष कहलाता है।
7. शंकु के शीर्ष को उसके आधार के केंद्र से मिलाने वाला रेखाखंड उसकी अक्ष कहलाती है। इस अक्ष की लंबाई शंकु की ऊँचाई कहलाती है।
8. शंकु के शीर्ष को उसके वृत्तीय किनारे पर स्थित किसी बिंदु से मिलाने वाले रेखाखंड की लंबाई उसकी तिर्यक ऊँचाई कहलाती है। साथ ही, $l = \sqrt{r^2 + h^2}$
9. शंकु के वृत्तीय किनारे को उसके शीर्ष से मिलाने वाली वक्र पृष्ठ उसकी पार्श्व पृष्ठ कहलाती है।
10. शंकु का पार्श्व या वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi rl$
11. शंकु का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi rl + \pi r^2 = \pi r\,(l + r)$
12. केंद्र O और त्रिज्या r वाला गोला (आकाश में स्थित) वह आकृति है जिसमें (आकाश के) वे सभी बिंदु सम्मिलित होते हैं जो O से r दूरी पर स्थित हैं।
13. r त्रिज्या वाले गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$
14. r त्रिज्या वाले अर्धगोले का पार्श्व या वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r^2$
15. r त्रिज्या वाले अर्धगोले का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r^2 + \pi r^2 = 3\pi r^2$

अध्याय

15

आयतन

15.1 भूमिका

हम जानते हैं कि प्रत्येक ठोस आकाश में कुछ क्षेत्र घेरता है और उसके द्वारा घेरे गए क्षेत्र के परिमाण को उसका *आयतन* (*volume*) कहते हैं। आयतन का एक मानक मात्रक घन सेंटीमीटर (cu cm) या cm^3 है। मात्रक घन सेंटीमीटर उस घन का आयतन होता है जिसकी भुजा 1 cm हो। a cm भुजा वाले घन का आयतन a cm $\times$ a cm $\times$ a cm अर्थात् a^3 cm^3 होता है।

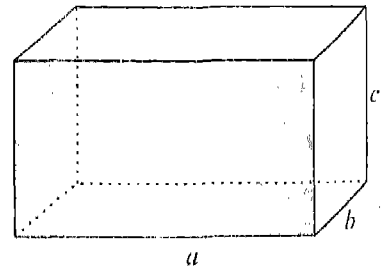
आयतन के कुछ अन्य मानक मात्रक mm^3, dm^3, m^3 और km^3 हैं। 1000 cm^3 आयतन वाले बर्तन की धारिता 1 लीटर या 1 l होती है।

हम यह भी जानते हैं कि यदि किसी घनाभ की भुजाएँ l cm, b cm और h cm हों, तो इसका आयतन $V = l \times b \times h$ cm^3 होता है। इस अध्याय में हम कुछ अन्य परिचित ठोस, जैसे बेलन, शंकु व गोले के आयतनों का अध्ययन करेंगे। अध्याय 14 के समान, यहाँ भी हम π का मान $\frac{22}{7}$ ही लेंगे जब तक कि कोई अन्य मान न दिया गया हो।

15.2 लंब वृत्तीय बेलन का आयतन

इस ठोस आकृति के विषय में हम पिछले अध्याय में पढ़ चुके हैं, जहाँ हमने इसका पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात किया था। यहाँ हम इसके आयतन पर विचार करेंगे। मान लें कि बेलन की आधार त्रिज्या r तथा ऊँचाई h है।

आकृति 15.1

पहले एक घनाभ पर विचार करें जिसकी लंबाई चौड़ाई व ऊँचाई क्रमशः a मात्रक, b मात्रक और c मात्रक हैं। हम जानते हैं कि इस घनाभ का आयतन $a \times b \times c$ मात्रक^3 है तथा पार्श्वीय पृष्ठ का क्षेत्रफल (lateral surface area) (वर्ग मात्रकों में)

$2(a \times c + b \times c)$ है। घनाभ के पार्श्वीय पृष्ठ के क्षेत्रफल को हम $2(a+b) \times c$ के रूप में लिख सकते हैं। हम यह भी जानते हैं कि $2(a+b)$ घनाभ के आधार का परिमाप है। इन दोनों में क्या संबंध है?

घनाभ के पार्श्वीय पृष्ठ का क्षेत्रफल = आधार का परिमाप × ऊँचाई

अब हम घनाभ के आयतन पर विचार करते हैं। हम जानते हैं कि घनाभ का आयतन $a \times b \times c$ है। साथ ही, $a \times b$ घनाभ के आधार का क्षेत्रफल है। इस प्रकार,

घनाभ का आयतन = $(a \times b) \times c$ = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

अत:, घनाभ के लिए

पार्श्वीय पृष्ठ का क्षेत्रफल = आधार का परिमाप × ऊँचाई

तथा आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

साथ ही, लंब वृत्तीय बेलन के लिए

पार्श्वीय (वक्र) पृष्ठ का क्षेत्रफल = $2\pi rh$ = आधार का परिमाप × ऊँचाई

अत:, (घनाभ से उस संबंध की तुलना करने पर) यह अनुमान लगाना स्वाभाविक ही है कि

बेलन का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई = $\pi r^2 h$

यह संबंध सत्य है, परंतु औपचारिक रूप से इसे सिद्ध करना पुस्तक की विषय-वस्तु के बाहर है। यद्यपि एक प्रयोग द्वारा हम इसकी सत्यता की जाँच कर सकते हैं।

क्रियाकलाप 1 : एक लंब वृत्तीय बेलनाकार बर्तन लें। इसकी त्रिज्या r तथा ऊँचाई h की माप सेंटीमीटर में ज्ञात कर नीचे दी गई सारणी में लिखें। $\pi = \frac{22}{7}$ या 3.14 लेकर $\pi r^2 h$ के मान का परिकलन कर, सारणी के संगत स्तंभ में लिखें।

बेलन	r	h	$\pi r^2 h$	V	V− $\pi r^2 h$
1					
2					
3					

अब बर्तन को पानी से पूरा-पूरा भरें। यहाँ बर्तन में भरे पानी का आयतन बेलन (बेलनाकार बर्तन) के आयतन V के बराबर होगा। मापन फ्लास्क (measuring flask) द्वारा पानी के आयतन को मापें। यह आयतन मात्रक ml में होगा। संबंध 1 ml = 1 cm^3 का प्रयोग कर इस माप को cm^3

में बदलें तथा सारणी में V स्तंभ में लिखें। अंतिम स्तंभ में $V - \pi r^2 h$ का मान लिखें। उक्त प्रयोग को कम से कम दो और अलग-अलग त्रिज्या व ऊँचाई वाले बेलनाकार बर्तन लेकर दोहराएँ।

आप क्या देखते हैं? आप देखेंगे कि शीर्षक $V - \pi r^2 h$ वाले अंतिम स्तंभ की प्रविष्टियाँ या तो शून्य हैं या इतनी छोटी कि इनकी उपेक्षा की जा सकती है। इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि $V - \pi r^2 h = 0$ अर्थात् $V = \pi r^2 h =$ आधार का क्षेत्रफल $\times$ ऊँचाई

कुछ उदाहरणों द्वारा हम इस सूत्र का प्रयोग समझाएँगे।

उदाहरण 1 : एक लंब वृत्तीय बेलन के आधार का व्यास 7 cm है। यदि इसकी ऊँचाई 40 cm है, तो बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ बेलन के आधार (वृत्त) का व्यास 7 cm है, अतः त्रिज्या $r = \frac{7}{2}$ cm है। साथ ही, ऊँचाई $h = 40$ cm तथा $\pi = \frac{22}{7}$ है। इस प्रकार,

$$\text{बेलन का आयतन } V = \pi r^2 h = \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times 40 \text{ cm}^3 = 1540 \text{ cm}^3$$

उदाहरण 2 : धातु से बने बेलनाकार खोखले एक पाइप की मोटाई 0.5 cm है तथा उसका बाहरी व्यास 4.5 cm है। यदि 1 cm^3 धातु का द्रव्यमान 8 g हो, तो 77 cm लंबे पाइप का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए।

हल : पहले हम 77 cm लंबे पाइप के धातु से बने भाग का आयतन ज्ञात करेंगे। यह आयतन दो ऐसे ठोस बेलनों के आयतनों का अंतर है जिनमें से एक का व्यास 4.5 cm है तथा दूसरे का व्यास (4.5 – 1.0) cm या 3.5 cm है।

बाहरी बेलन के लिए

$$\text{त्रिज्या} = \frac{1}{2} \times 4.5 \text{ तथा ऊँचाई} = 77 \text{ cm}$$

$$\therefore \quad \text{आयतन} = \frac{22}{7} \times \frac{4.5}{2} \times \frac{4.5}{2} \times 77 \text{ cm}^3 = 242 \times \left(\frac{4.5}{2}\right)^2 \text{cm}^3 \qquad (1)$$

आंतरिक बेलन के लिए

$$\text{त्रिज्या} = \left(\frac{4.5}{2} - 0.5\right) \text{cm} = \frac{3.5}{2} \text{ cm तथा ऊँचाई} = 77 \text{ cm}$$

$$\therefore \quad \text{आयतन} = \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times \frac{3.5}{2} \times 77 \text{ cm}^3 = 242 \times \left(\frac{3.5}{2}\right)^2 \text{cm}^3 \qquad (2)$$

$\therefore$ पाइप का अभीष्ट आयतन = बाहरी बेलन का आयतन – आंतरिक बेलन का आयतन

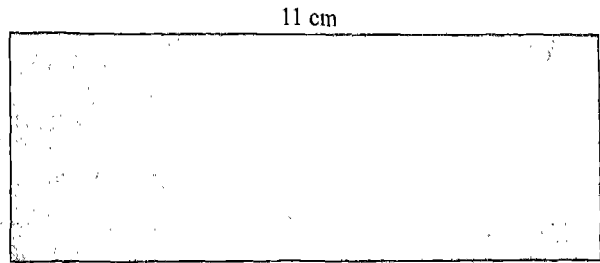
$$= 242 \times \left[\left(\frac{4.5}{2}\right)^2 - \left(\frac{3.5}{2}\right)^2\right] \text{cm}^3 \qquad \text{[(1) व (2) से]}$$

$$= 242 \times \left(\frac{4.5}{2} + \frac{3.5}{2}\right) \times \left(\frac{4.5}{2} - \frac{3.5}{2}\right) \text{cm}^3$$

$$= 242 \times 4 \times 0.5 \text{ cm}^3 = 484 \text{ cm}^3$$

अतः, पाइप का द्रव्यमान $= 484 \times 8$ g [क्योंकि 1 cm^3 धातु का द्रव्यमान 8 g है]

$$= 3872 \text{ g} = 3.872 \text{ kg}$$

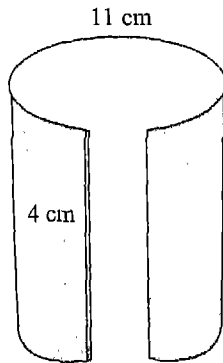
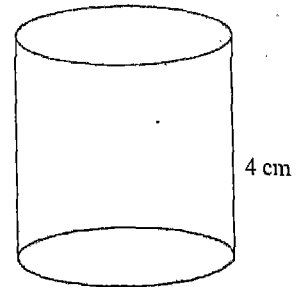
उदाहरण 3 : एक 11 cm $\times$ 4 cm आयताकार कागज को मोड़कर दोनों सिरों को एक-दूसरे पर चढ़ाए बिना, जोड़कर 4 cm ऊँचाई का एक बेलन बनाया जाता है (आकृति 15.2)। इस प्रकार बने बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए।

आकृति 15.2 (i)

हल : यहाँ कागज की लंबाई वाले सिरे बेलन की गोलाई वाले सिरे बनते हैं। अतः, बेलन के प्रत्येक वृत्तीय सिरे की परिधि 11 cm है। माना कि बेलन के प्रत्येक वृत्तीय सिरे की त्रिज्या r तथा ऊँचाई h है।

तब, $2\pi r = 11$ cm

आकृति 15.2

$$\therefore \quad r = \frac{11}{2\pi} \text{ cm} = \frac{11 \times 7}{2 \times 22} \text{ cm} = \frac{7}{4} \text{ cm}$$

$\therefore$ बेलन का आयतन $= \pi r^2 h = \frac{22}{7} \times \frac{7}{4} \times \frac{7}{4} \times 4 \text{ cm}^3 = 38.5 \text{ cm}^3$

उदाहरण 4 : 14 cm त्रिज्या वाली एक बेलनाकार बाल्टी में कुछ ऊँचाई तक पानी भरा है। यदि 28 cm × 11 cm × 10 माप के एक आयताकार ठोस को पानी में पूरा डुबा दिया जाए, तो बाल्टी में पानी कितनी और ऊँचाई तक चढ़ जाएगा?

हल : यदि पानी पहले की तुलना में h cm और ऊँचा चढ़ जाता है, तो h ऊँचाई वाले बेलनाकार स्तंभ का आयतन = आयताकार ठोस का आयतन

अर्थात् $$\frac{22}{7} \times 14 \times 14 \times h = 28 \times 11 \times 10$$

या $$h = \frac{28 \times 11 \times 10 \times 7}{22 \times 14 \times 14} = 5$$

इस प्रकार, बाल्टी में पानी का स्तर 5 cm ऊँचा हो जाता है।

प्रश्नावली 15.1

1. नीचे दी गई त्रिज्या (r) व ऊँचाई (h) वाले लंब वृत्तीय बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए:
   (i) $r = 7$ cm, $h = 15$ cm (ii) $r = 10.5$ cm, $h = 2$ cm
   (iii) $r = 2.8$ m, $h = 15$ m (iv) $r = 3.5$ m, $h = 1$ m
2. एक लंब वृत्तीय बेलनाकार बर्तन के आधार की परिधि 132 cm तथा ऊँचाई 25 cm है। बर्तन में कितना लीटर पानी आ सकता है?
3. लकड़ी के एक बेलनाकार पाइप का आंतरिक व्यास 24 cm तथा बाह्य व्यास 28 cm है। यदि 1 cm^3 लकड़ी का द्रव्यमान 3g है, तो 35 cm लंबे पाइप का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए।
4. धातु की एक नली की मोटाई 1 cm तथा बाह्य त्रिज्या 11 cm है। ऐसी 1 मीटर लंबी नली का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए, यदि धातु का घनत्व 7.5 g प्रति cm^3 है।
5. एक दिन 10 cm वर्षा हुई। यदि 70 m लंबी तथा 44 m चौड़ी छत पर गिरे जल को 14 m त्रिज्या वाले एक बेलनाकार टंकी में डाला जाए, तो ज्ञात कीजिए :
   (i) छत पर गिरे जल का आयतन
   (ii) वर्षा के इस जल को टंकी में भरे जाने पर जलस्तर की ऊँचाई में वृद्धि
6. 3.5 m त्रिज्या वाला एक वृत्ताकार कुआँ 20 m गहराई तक खोदा गया तथा इस प्रकार खुदाई से प्राप्त मिट्टी को 14 m लंबे व 11 m चौड़े एक आयताकार भूखंड पर फैलाया गया। ज्ञात कीजिए:
   (i) खुदाई से प्राप्त मिट्टी का आयतन
   (ii) आयताकार भूखंड का क्षेत्रफल

(iii) आयताकार भूखंड पर मिट्टी फैलाने से बने चबूतरे की ऊँचाई

7. एक शीतल पेय बाजार में दो प्रकार के डिब्बों में उपलब्ध है: 5 cm लंबाई 4 cm चौड़ाई के आयताकार आधार व 15 cm ऊँचाई वाले एक टिन के डिब्बे में तथा 7 cm व्यास के वृत्ताकार आधार व 10 cm ऊँचाई वाले एक बेलनाकार प्लास्टिक के डिब्बे में। किस डिब्बे की धारिता अधिक है और कितनी?

8. यदि 5 cm ऊँचे किसी लंब वृत्तीय बेलन के पार्श्वीय पृष्ठ का क्षेत्रफल 94.2 cm^2 है, तो ज्ञात कीजिए :

   (i) आधार की त्रिज्या

   (ii) बेलन का आयतन (मान लीजिए $\pi = 3.14$)

9. 10 m गहरे एक लंब वृत्तीय बेलनाकार बर्तन के अंदर के वक्र पृष्ठ को पेंट करने में 20 रु प्रति वर्गमीटर की दर से 2200 रु व्यय हुआ। ज्ञात कीजिए :

   (i) बर्तन के आंतरिक वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल

   (ii) बर्तन के आधार की त्रिज्या

   (iii) बर्तन की धारिता

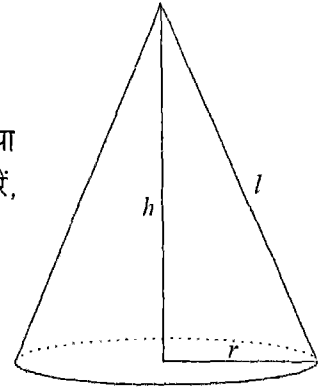
10. 1 मीटर ऊँचाई वाले बंद बेलनाकार बर्तन की धारिता 15.4 l है। इस बर्तन को बनाने में कितने वर्ग मीटर धातु की चादर की आवश्यकता होगी ?

15.3 लंब वृत्तीय शंकु का आयतन

एक लंब वृत्तीय शंकु पर विचार करें जिसके आधार की त्रिज्या r तथा ऊँचाई h है। इसकी तिर्यक ऊँचाई को यदि l से प्रदर्शित करें, तो हम जानते हैं कि शंकु के वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल है :

$$S = \pi r l$$

या $$S = \frac{1}{2} \times \text{आधार की परिधि} \times \text{तिर्यक ऊँचाई}$$

इस शंकु का आयतन V ज्ञात करने के लिए, हम कुछ प्रयोग करेंगे।

आकृति 15.3

क्रियाकलाप 2 : ऊँचाई h व त्रिज्या r वाले एक लंब वृत्तीय शंकु के आकार का बर्तन लें। समान ऊँचाई h व समान त्रिज्या r वाले लंब वृत्तीय बेलन के आकार का एक अन्य बर्तन लें।

अब शंकु के आकार वाले बर्तन में ऊपर तक पानी भरें तथा इस पानी को बेलनाकार बर्तन में उँड़ेल दें। क्या बेलनाकार बर्तन पूरा भर गया? आप देखेंगे कि बर्तन आधा भी नहीं भरा। आप इसमें और पानी डाल सकते हैं। शंक्वाकार बर्तन को एक बार फिर पूरा भरकर बेलनाकार बर्तन में उँड़ेल दें। आप देखेंगे कि बर्तन अब भी पूरा नहीं भरा। एक बार पुनः यही क्रिया दोहराने पर आप पाएँगे कि बेलनाकार बर्तन अब पूरी तरह भर गया है। यह प्रयोग सुझाता है कि *बेलनाकार बर्तन का आयतन शंक्वाकार बर्तन के आयतन का तीन गुना है।*

अर्थात्,

शंकु का आयतन $= \frac{1}{3} \times$ *बेलन का आयतन*

इस प्रकार, यदि आधार त्रिज्या r व ऊँचाई h वाले शंकु का आयतन V है, तो

$$V = \frac{1}{3} \text{ (आधार त्रिज्या } r \text{ व ऊँचाई } h \text{ वाले बेलन का आयतन)}$$

$$= \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$= \frac{1}{3} \text{ (शंकु के आधार का क्षेत्रफल)} \times \text{ऊँचाई}$$

बेलन के समान यहाँ भी हम इस संबंध को सिद्ध नहीं करेंगे। हाँ, बेलन की भाँति, विभिन्न त्रिज्याओं व ऊँचाइयों के शंकुओं के लिए, हम इस संबंध को सत्यापित कर सकते हैं।

क्रियाकलाप 3 : एक शंक्वाकार बर्तन लें तथा इसके आधार की त्रिज्या r व ऊँचाई h को सेंटीमीटर में मापें। अब $\pi = \frac{22}{7}$ या 3.14 लेकर $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ का मान परिकलन करें तथा निम्न सारणी में यथा स्थान लिखें।

शंकु	r	h	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$	V	$V - \frac{1}{3}\pi r^2 h$
1					
2					
3					

अब इस बर्तन को पानी से ऊपर तक भरें तथा मापन फ्लास्क द्वारा इस पानी का आयतन cm^3 में ज्ञात कर सारणी के पाँचवें स्तंभ में लिखें। अब $V - \frac{1}{3}\pi r^2 h$ का परिकलन

कर, मान को सारणी के अंतिम स्तंभ में लिखें। इसी प्रयोग को भिन्न-भिन्न त्रिज्या और ऊँचाई वाले कम से कम दो और शंक्वाकार बर्तनों के साथ दोहराएँ।

सारणी के अंतिम स्तंभ के अवलोकन से हमें क्या प्राप्त होता है? हम देखते हैं कि प्रविष्टियाँ या तो शून्य हैं, या इतनी छोटी कि इनकी उपेक्षा की जा सकती है। अतः हम कह सकते हैं कि $V - \frac{1}{3}\pi r^2 h = 0$ है। इस प्रकार, हमें निम्नलिखित सूत्र प्राप्त होता है:

$$\text{शंकु का आयतन } V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

उदाहरण 5 : उस लंब वृत्तीय शंकु का आयतन ज्ञात कीजिए जिसकी ऊँचाई 2.04 m तथा आधार त्रिज्या 14 cm है।

हल : यहाँ $r = 14$ cm तथा $h = 2.04$ m $= 204$ cm है।

$$\text{अतः, शंकु का आयतन } V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14 \times 204 \text{ cm}^3$$

$$= 41888 \text{ cm}^3$$

टिप्पणी: उपर्युक्त आधार त्रिज्या व ऊँचाई वाले शंक्वाकार बर्तन में 41.888 l द्रव्य समाएगा।

उदाहरण 6 : एक शंकु की ऊँचाई व तिर्यक ऊँचाई क्रमशः 21 cm तथा 28 cm है। ज्ञात कीजिए : (i) शंकु के आधार का क्षेत्रफल (ii) शंकु का आयतन

हल: (i) यदि शंकु की ऊँचाई h, तिर्यक ऊँचाई l तथा आधार त्रिज्या r हो, तो हम जानते हैं कि

$$r^2 = l^2 - h^2$$

इस प्रकार, दिए गए शंकु के लिए

$$r^2 = 28^2 - 21^2$$

$$= (28 + 21)(28 - 21) = (49)(7)$$

या $\quad r = 7\sqrt{7}$

इस प्रकार, शंकु के आधार का क्षेत्रफल $A = \pi r^2 = \frac{22}{7} \times \left(7\sqrt{7}\right)^2$ cm^2

$$= \frac{22}{7} \times 49 \times 7 \text{ cm}^2 = 1078 \text{ cm}^2$$

(ii) शंकु का आयतन $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times$ (आधार का क्षेत्रफल) $\times$ ऊँचाई

$$= \frac{1}{3} \times 1078 \times 21 \text{ cm}^3 = 7546 \text{ cm}^3$$

उदाहरण 7 : एक शंक्वाकार तंबू का आयतन 1232 m^3 है तथा इसके आधार का क्षेत्रफल 154 m^2 है। यदि तंबू के कैनवस की चौड़ाई 2 m हो, तो तंबू बनाने में कितने लंबे कैनवस की आवश्यकता होगी?

हल : तंबू के निर्माण के लिए आवश्यक कैनवस का क्षेत्रफल तंबू के वक्र पृष्ठ के क्षेत्रफल $\pi r l$ के बराबर होगा। हमें ज्ञात है कि

$$\text{शंक्वाकार तंबू का आयतन} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = 1232 \text{ m}^3$$

तथा तंबू के आधार का क्षेत्रफल $A = \pi r^2 = 154 \text{ m}^2$ (1)

$$\therefore \quad \frac{1}{3} \times 154 \times h = 1232$$

या $h = \frac{1232 \times 3}{154} \text{ m} = 24 \text{ m}$ (2)

साथ ही, (1) से आधार त्रिज्या $r = \sqrt{\frac{154 \times 7}{22}} \text{ m} = 7 \text{ m}$ (3)

अत:, $l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{24^2 + 7^2} \text{ m} = 25 \text{ m}$ [(2) व (3) से]

तथा $\pi r l = \frac{22}{7} \times 7 \times 25 \text{ m}^2 = 550 \text{ m}^2$

$$\therefore \quad \text{तंबू के निर्माण में प्रयुक्त कैनवस की लंबाई} = \frac{\text{पृष्ठीय क्षेत्रफल}}{\text{चौड़ाई}} = \frac{550}{2} \text{ m} = 275 \text{ m}$$

प्रश्नावली 15.2

1. उस लंब वृत्तीय शंकु का आयतन ज्ञात कीजिए जिसके लिए

(i) $r = 6$ cm तथा $h = 7$ cm (ii) $r = 3.5$ cm तथा $h = 12$ cm

2. उस शंक्वाकार बर्तन की धारिता ज्ञात कीजिए जिसके लिए

(i) $r = 7$ cm तथा $l = 25$ cm (ii) $h = 12$ cm तथा $l = 13$ cm

3. यदि किसी शंकु की ऊँचाई 15 cm तथा आयतन 1570 cm^3 है, तो शंकु के आधार का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ लीजिए)

4. धातु के बने किसी ठोस शंकु को पिघलाकर एक ठोस बेलन बनाया गया जिसका वृत्तीय आधार शंकु के वृत्तीय आधार के बराबर है। यदि इस प्रकार प्राप्त बेलन की ऊँचाई 7 cm है, तो शंकु की ऊँचाई कितनी थी?

5. यदि 9 cm ऊँचाई वाले एक लंब वृत्तीय शंकु का आयतन 48 π cm^3 है, तो शंकु के आधार का व्यास ज्ञात कीजिए।

6. एक शंक्वाकार गड्ढे का ऊपरी व्यास 3.5 m तथा गहराई 12 m है। किलो लीटर में इस गड्ढे की धारिता क्या है?

7. एक लंब वृत्तीय शंकु का आयतन 9856 cm^3 है। यदि इसके आधार का व्यास 28 cm है, तो ज्ञात कीजिए :

   (i) शंकु की ऊँचाई (ii) शंकु की तिर्यक ऊँचाई

   (iii) शंकु के वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल

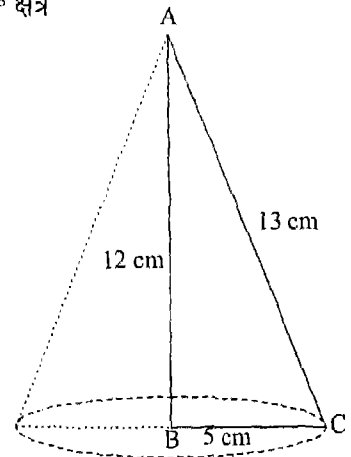
8. एक शंक्वाकार तंबू की ऊँचाई 9 m तथा इसके आधार का व्यास 24 m है। तंबू में समा सकने वाले व्यक्तियों की संख्या ज्ञात कीजिए। यदि एक व्यक्ति के लिए आवश्यक है :

   (i) धरती पर बैठने के लिए 2 m^2 स्थान

   (ii) श्वास लेने के लिए 15 m^3 क्षेत्र

   (iii) धरती पर 2 m^2 स्थान तथा श्वास लेने के लिए 15 m^3 क्षेत्र

9. एक समकोण त्रिभुज ABC जिसकी भुजाएँ क्रमशः 5 cm, 12 cm तथा 13 cm हैं, 12 cm लंबी भुजा के परितः घुमाया जाता है (आकृति 15.4)। इस प्रकार प्राप्त ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए।

10. यदि प्रश्न 9 में त्रिभुज ABC को 5 cm लंबी भुजा के परितः घुमाया जाता है, तो प्राप्त ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए। प्राप्त दोनों ठोस के आयतनों का अनुपात भी ज्ञात कीजिए।

आकृति 15.4

15.4 गोले का आयतन

ठोस गोले के बारे में हम पढ़ चुके हैं। हम यह भी जानते हैं कि यदि गोले की त्रिज्या r हो, तो इसके पृष्ठ का क्षेत्रफल $4\pi r^2$ होता है। परंतु इस सूत्र को हमने सिद्ध नहीं किया था। इसी प्रकार, बिना औपचारिक रूप से इस तथ्य को सिद्ध किए, हम कहेंगे कि त्रिज्या r वाले गोले का आयतन सूत्र

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

द्वारा प्राप्त होता है। परंतु कुछ प्रयोगों द्वारा हम इस सूत्र की सत्यता की जाँच कर सकते हैं।

क्रियाकलाप 4: एक ठोस गेंद (जो कि एक गोला है) लें तथा किसी उचित मापक द्वारा इसकी त्रिज्या r ज्ञात करें। अब $\frac{4}{3}\pi r^3$ का परिकलन करें तथा इन मानों को नीचे दी गई सारणी में लिखें।

गोला	r	$\frac{4}{3}\pi r^3$	V	$V - \frac{4}{3}\pi r^3$
1				
2				
3				

अब एक बाल्टी लें जिसमें गेंद भली प्रकार आ सके। अब बाल्टी को रखने के लिए एक अन्य बर्तन इतना चौड़ा लीजिए जिसमें बाल्टी से गिरे पानी को एकत्रित किया जा सके। अब बाल्टी को इस खाली बर्तन में रखिए तथा इसे (बाल्टी को) ऊपर तक पूरा पानी से भर दीजिए। अब धीरे से गेंद को बाल्टी में डुबोइए। चूँकि बाल्टी ऊपर तक पानी से भरी है, इसलिए गेंद द्वारा विस्थापित पानी बाल्टी से छलककर नीचे रखे बर्तन में एकत्रित हो जाएगा। अब बाल्टी को (गेंद सहित) बर्तन में से बाहर निकाल दें। बर्तन में एकत्रित पानी का आयतन गेंद के आयतन के बराबर होगा। इस पानी के आयतन V को एक मापन फ्लास्क द्वारा cm^3 में ज्ञात कर, सारणी में भरें। सारणी के अंतिम स्तंभ में $V - \frac{4}{3}\pi r^3$ का मान लिखें। इस प्रयोग को अन्य त्रिज्याओं वाली कम-से-कम दो और गेंद लेकर दोहराएँ।

सारणी के अवलोकन से हमें क्या ज्ञात होता है? हम देखते हैं कि अंतिम स्तंभ की प्रविष्टियाँ या तो शून्य हैं, या इतनी छोटी हैं कि इनकी उपेक्षा की जा सकती है। अतः हम

कह सकते हैं कि सभी गोलों के लिए

$$V - \frac{4}{3}\pi r^3 = 0 \quad \text{अर्थात्} \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ होता है।}$$

क्रियाकलाप 5 : एक अर्धगोलीय कटोरा लें तथा किसी उचित मापन यंत्र द्‌वारा cm में इसकी आंतरिक त्रिज्या r ज्ञात करें। इस मान को नीचे दी गई सारणी में भरें।

अब $\frac{2}{3}\pi r^3$ का परिकलन करें तथा इसे सारणी के अगले स्तंभ में भरें। अब कटोरे को ऊपर तक पानी से भरें तथा इस पानी को किसी मापन फ्लास्क में डालकर इसका आयतन V cm^3 में ज्ञात करें। यह मान सारणी के चौथे स्तंभ में लिखें।

अर्धगोलीय कटोरा	r	$\frac{2}{3}\pi r^3$	V	$V - \frac{2}{3}\pi r^3$
1				
2				
3				

अगले स्तंभ में $V - \frac{2}{3}\pi r^3$ का मान भरें। यह प्रयोग कम से कम दो और भिन्न-भिन्न आंतरिक त्रिज्या वाले अर्धगोलीय कटोरे लेकर दोहराएँ।

हम क्या देखते हैं? हम देखते हैं कि $V - \frac{2}{3}\pi r^3$ के मान या तो शून्य हैं या इतने छोटे हैं कि इनकी उपेक्षा की जा सकती है। अत:, हम मान सकते हैं कि

$$V - \frac{2}{3}\pi r^3 = 0 \text{ अर्थात् } V = \frac{2}{3}\pi r^3 \text{ है।}$$

दूसरे शब्दों में, r त्रिज्या वाले अर्धगोलीय कटोरे के पानी का आयतन $\frac{2}{3}\pi r^3$ है। इसका तात्पर्य यह हुआ कि त्रिज्या r वाले गोले का आयतन, जो इसी त्रिज्या वाले अर्धगोलीय कटोरे के आयतन का दुगुना है, $2 \times \frac{2}{3}\pi r^3$ या $\frac{4}{3}\pi r^3$ है।

टिप्पणी : एक अन्य प्रयोग जिसके द्‌वारा किसी अर्धगोले के आयतन का सूत्र प्राप्त करने में सहायता मिले, इस प्रकार है :

r त्रिज्या वाला एक अर्धगोलीय कटोरा लें। r आधार त्रिज्या व r ऊँचाई वाला एक शंक्वाकार बर्तन भी लें। अब शंक्वाकार बर्तन को पानी से पूरा-पूरा भरें तथा अर्धगोलीय कटोरे में उँड़ेल दें। कटोरा पूरा नहीं भरेगा। पुनः शंक्वाकार बर्तन को पानी से पूरा-पूरा भरें तथा कटोरे में उँड़ेल लें। अब कटोरा पूरा भर जाएगा। इस प्रकार,

कटोरे की धारिता $= 2 \times$ शंक्वाकार बर्तन की धारिता

क्योंकि शंक्वाकार बर्तन की धारिता $\frac{1}{3}\pi r^3$ (बर्तन की ऊँचाई r है) है; अतः r त्रिज्या वाले अर्धगोलीय कटोरे की धारिता $= 2 \times \frac{1}{3}\pi r^3$ या $\frac{2}{3}\pi r^3$ है। यह परिणाम वही है जो क्रियाकलाप 5 से प्राप्त हुआ था।

उदाहरण 8 : 2.1 cm त्रिज्या वाले एक गोले का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $r = 2.1$ cm

$\therefore$ गोले का आयतन $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 2.1 \times 2.1 \times 2.1 \text{ cm}^3$$

$$= 38.808 \text{ cm}^3$$

उदाहरण 9 : एक अर्धगोलीय टंकी की धारिता 155.232 l है। टंकी की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल : मान लें कि टंकी की त्रिज्या r cm है। इसका आयतन है:

$$V = \frac{2}{3}\pi r^3 \text{ cm}^3$$

साथ ही, $155.232\, l = 155.232 \times 1000 \text{ cm}^3 = 155232 \text{ cm}^3$

$\therefore$ $\frac{2}{3}\pi r^3 = 155232$

या $r^3 = \frac{155232 \times 3 \times 7}{2 \times 22}$

$$= 3528 \times 3 \times 7$$

$$= (2 \times 3 \times 7)^3$$

$\therefore \quad r = 2 \times 3 \times 7 = 42$

अतः, टंकी की त्रिज्या 42 cm है।

उदाहरण 10 : 36 m लंबे व 2 mm व्यास वाले ताँबे के तार को पिघलाकर एक गोला बनाया जाता है। ज्ञात कीजिए :

(i) तार का आयतन (ii) गोले का आयतन

(iii) गोले की त्रिज्या

हल : (i) तार की त्रिज्या $= \frac{1}{2} \times 2$ mm $= 1$ mm $= 0.1$ cm तथा

तार की लंबाई $= 36$ m $= 3600$ cm

$\therefore$ तार का आयतन $= \pi \times (0.1)^2 \times 3600 \text{ cm}^3$

$$= 36\,\pi \text{ cm}^3$$

(ii) गोले का आयतन = तार का आयतन $= 36\,\pi \text{ cm}^3$

(iii) यदि गोले की त्रिज्या r cm है, तो

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 36\pi$$

अर्थात् $\quad r^3 = \frac{36 \times 3}{4}$

या $\quad r^3 = 3^3$

या $\quad r = 3$

अतः, गोले की त्रिज्या 3 cm है।

उदाहरण 11 : स्टील के एक अर्धगोलीय कटोरे की मोटाई 0.3 cm है (आकृति 15.5)। यदि कटोरे की अंतः त्रिज्या 7 cm हो, तो कटोरे को बनाने में प्रयुक्त स्टील का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : कटोरे को 7.3 cm तथा 7 cm त्रिज्याओं वाले दो ठोस गोलार्धों के बीच का भाग समझा जा सकता है। अब अंतः गोलार्ध का आयतन $= \frac{2}{3} \times \pi \times 7^3 \text{ cm}^3$

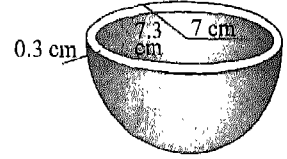
तथा बाह्य गोलार्ध का आयतन $= \frac{2}{3} \times \pi \times (7.3)^3 \text{ cm}^3$

$\therefore$ प्रयुक्त स्टील का आयतन $= \left[\frac{2}{3} \times \pi \times (7.3)^3 - \frac{2}{3} \times \pi \times 7^3\right] \text{cm}^3$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times \left[(7.3)^3 - 7^3\right] \text{cm}^3$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 46.017 \text{ cm}^3$$

$$= 96.42 \text{ cm}^3$$

0.3 cm 7.3 cm 7 cm

आकृति 15.5

प्रश्नावली 15.3

1. गोले का आयतन ज्ञात कीजिए, यदि इसकी त्रिज्या है:

   (i) 7 cm (ii) 3.5 dm (iii) 0.63 m

2. एक ठोस गोले द्वारा विस्थापित पानी का आयतन ज्ञात कीजिए यदि गोले का व्यास है:

   (i) 28 cm (ii) 0.21 m (iii) 3.5 dm

3. प्रश्न 2 में प्राप्त आयतनों को लीटर में व्यक्त कीजिए।

4. 10.5 cm व्यास वाले एक अर्धगोलीय कटोरे में कितने लीटर दूध आ सकता है?

5. धातु की एक गेंद का व्यास 4.2 cm है। यदि धातु का घनत्व 8.9 g प्रति cm^3 हो, तो गेंद का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए।

6. चंद्रमा का व्यास पृथ्वी के व्यास का लगभग एक-चौथाई है। चंद्रमा का आयतन पृथ्वी के आयतन का कौन-सा भाग है?

7. लोहे के बने एक अर्धगोलीय टंकी की मोटाई 1 cm है। यदि टंकी की अंत: त्रिज्या 1 m हो, तो टंकी के बनाने में प्रयुक्त लोहे का आयतन ज्ञात कीजिए।

8. उस गोले का आयतन ज्ञात कीजिए जिसके पृष्ठ का क्षेत्रफल 154 cm^2 है।

9. एक भवन का गुंबद गोलार्ध रूप में है। गुबंद की आंतरिक पृष्ठ पर सफेदी कराने में 498.96 रुपए व्यय हुए। यदि सफेदी कराने की दर 2.00 रुपए प्रति वर्ग मीटर हो, तो ज्ञात कीजिए :

   (i) गुंबद की आंतरिक पृष्ठ का क्षेत्रफल (ii) गुंबद के अंदर की हवा का आयतन

10. त्रिज्या r व पृष्ठीय क्षेत्रफल S वाले लोहे के 27 ठोस गोलों को पिघलाकर एक गोला बनाया जाता है, जिसका पृष्ठीय क्षेत्रफल S′ है। ज्ञात कीजिए:

(i) नए गोले की त्रिज्या r' (ii) S का S′ के साथ अनुपात

याद रखने योग्य बातें

1. किसी ठोस द्वारा घेरे गए आकाशीय क्षेत्र का परिमाण उसका आयतन कहलाता है।
2. आयतन का एक मानक मात्रक cm^3 (या cu cm) है। कुछ अन्य मानक मात्रक mm^3, dm^3, m^3 तथा km^3 हैं।
3. किसी बर्तन की धारिता उस बर्तन में आ सकने वाले द्रव का आयतन होती है। धारिता का मात्रक लीटर (l) है।
4. $1\ l = 10^3\ cm^3$, $1\ ml = 1 cm^3$
5. लंब वृत्तीय बेलन का आयतन :

$$V = (\text{आधार का क्षेत्रफल}) \times (\text{ऊँचाई}) = \pi r^2 h$$

6. लंब वृत्तीय शंकु का आयतन :

$$V = \frac{1}{3} \times (\text{आधार का क्षेत्रफल}) \times (\text{ऊँचाई}) = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

7. गोले का आयतन:

$$V = \frac{4}{3} \times \pi \times (\text{त्रिज्या})^3 = \frac{4}{3} \pi r^3$$

8. गोलार्ध अर्थात् अर्धगोले का आयतन:

$$V = \frac{2}{3} \times \pi \times (\text{त्रिज्या})^3 = \frac{2}{3} \pi r^3$$

अतीत के झरोखे से

निप्पुर (Nippur) में हुई खुदाई से प्राप्त मिट्टी के शिलालेखों (tablet) के आधार तथा अहम्स पेपिरस (Ahmes papyrus) के संदर्भों से हम विश्वास के साथ कह सकते हैं कि बेबीलोनियावासियों को ज्यामिति की आधारभूत संकल्पनाओं का ज्ञान था। इन शिलालेखों से यह स्पष्ट है कि बेबीलोनियावासी 1550 ईसा पूर्व में भी आयतों (जिनमें वर्ग भी सम्मिलित हैं), समकोण त्रिभुजों और समलंबों के क्षेत्रफलों को ज्ञात कर सकते थे। यह भी संभावित है कि उन्हें वृत्त के क्षेत्रफल की संकल्पना का भी कुछ ज्ञान था। वे घनाभों (और संभवत: बेलनों) के आयतन भी ज्ञात कर सकते थे। अहम्स पेपिरस में एक समद्विबाहु त्रिभुज के क्षेत्रफल के लिए सूत्र $\frac{1}{2}bh$ रूप में दिया है, जिसे हम आज भी प्रयोग करते हैं। इसी में ही, व्यास d वाले वृत्त के क्षेत्रफल के लिए सूत्र $(d - \frac{1}{9}d)^2$ के रूप में दिया है, जिससे π का मान 3.1605 प्राप्त होता है।

जहाँ मिस्रवासियों एवं भारतीयों द्वारा प्रयोग की गई ज्यामिति *व्यावहारिक* ज्यामिति थी, वहीं यूनानियों द्वारा विकसित ज्यामिति *अमूर्त* (*abstract*) थी। याद कीजिए कि मिस्रवासियों ने ज्यामिति का प्रयोग भूमि मापने एवं पिरामिडों को बनाने में किया तथा भारतीयों ने ज्यामिति का प्रयोग वेदियाँ बनाने, कोलोनियों एवं जल प्रणालियों के निर्माण हेतु योजनाएँ बनाने तथा सड़कों एवं भवनों को बनाने में किया। परंतु यूनानी ज्यामिति भौतिकता से रहित थी। इस प्रकार, उनके अनुसार बिंदु की कोई विमा (dimension) नहीं थी (क्या आप इसे आलेखित कर सकते हैं ?) रेखा की केवल एक विमा लंबाई थी (क्या आप इसे बिना मोटाई या ऊँचाई के खींच सकते हैं?), इत्यादि। उसके बाद से अन्य अमूर्त ज्यामितियाँ विकसित हो चुकी हैं। यूनानी ज्यामिति में, यूक्लिड ने जो एक अभिगृहीत दी है उसका वर्तमान रूप है: *एक रेखा और उस पर न स्थित एक बिंदु दिए होने पर, उस दिए हुए बिंदु से होकर उस दी हुई रेखा के समांतर ठीक एक रेखा खींची जा सकती है।* ऐसी ज्यामितियाँ विकसित की जा चुकी हैं जिनमें से एक में दिए हुए बिंदु से होकर दी हुई रेखा के समांतर एक से अधिक रेखाएँ खींची जा सकती हैं, जबकि एक अन्य ज्यामिति में यह आवश्यक नहीं कि दिए हुए बिंदु से होकर दी हुई रेखा के समांतर कोई भी रेखा खींची ही जा सके। (यह रोचक बात है कि इन दोनों ज्यामितियों के भौतिक मॉडल (models) विद्यमान हैं)।

ज्यामति के विकास में योगदान करने वाले कुछ प्राचीन भारतीय गणितज्ञ हैं : *बौधायन* (800 ईसा पूर्व) जिन्होंने पाइथागोरस प्रमेय के नाम से प्रसिद्ध एक प्रमेय को सिद्ध किया, *ब्रह्मगुप्त* (जन्म 598 ई.) जिन्होंने एक (चक्रीय) चतुर्भुज का क्षेत्रफल उसकी भुजाओं तथा अर्धपरिमाप के पदों में ज्ञात किया, *भास्कर* (जन्म 1114 ई.) जिन्होंने पाइथागोरस प्रमेय की एक विभाजन (dissection) उपपत्ति दी तथा *आर्यभट्ट* (जन्म 476 ई.) जिन्होंने समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल तथा एक पिरामिड एवं गोले के आयतन ज्ञात किए। उन्होंने π का भी एक ऐसा मान दिया जो चार दशमलव स्थानों तक परिशुद्ध था।

प्राचीन काल के व्यक्तियों ने π का मान ज्ञात करने के लिए अनेक तकनीकें प्रयोग कीं। *आर्किमिडीज* ने 96 भुजाओं वाले दो बहुभुजों के क्षेत्रफलों का प्रयोग किया, जिनमें से एक वृत्त के अंतर्गत था तथा दूसरा उस वृत्त के परिगत था और वहाँ से यह निष्कर्ष निकाला कि $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ है, अर्थात् $3.1408 < \pi < 3.1428$ है। अनेक व्यक्तियों ने π का मान व्यक्त करने के लिए, अपरिमित श्रेणियों का प्रयोग किया। उदाहरणार्थ, *लेबनिज* (1073) ने π का मान $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \ldots$ के रूप में दिया।

सर्वकालिक महान भारतीय गणितज्ञ श्रीनिवास रामानुजन (1887–1920) ने 1914 में एक शोधपत्र लिखा जिसका शीर्षक Modular Equations and Approximations to π था। इस पत्र में उन्होंने $\frac{1}{\pi}$ का मान देने के लिए 15 भिन्न–भिन्न श्रेणियाँ दीं। इनमें से कुछ को आधार बनाकर नासा के बेली (D.H. Bailey) साइमन फ्रेजर विश्वविद्यालय के बॉरवाइन और बॉरवाइन (J.M. Borwein और P.B. Borwein) ने कुछ कंप्यूटर प्रोग्राम लिखे जिनसे π का मान एक बिलियन स्थानों तक लिखा जा सकता है।

अध्याय

16

सांख्यिकी

16.1 भूमिका

कक्षा VII में हमने दिए गए आँकड़ों या सूचनाओं को निरूपित करने वाले चित्रालेखों एवं दंड आलेखों (दंड चार्टों) को पढ़ने, उनकी व्याख्या करने तथा उनकी रचनाएँ करने के साथ-साथ सांख्यिकी का अध्ययन प्रारंभ किया था। आप देख चुके हैं कि आँकड़ों का यह चित्रमय निरूपण किस प्रकार हमें केवल देखने मात्र से ही इन दिए हुए आँकड़ों के बारे में कुछ उपयोगी जानकारी प्राप्त करने में समर्थ बनाता है। इस अध्याय में हम औपचारिक रूप से सांख्यिकी का अध्ययन प्रारंभ करेंगे। हम यथा प्राप्त (raw) आँकड़ों का समांतर माध्य ज्ञात करना सीखेंगे। हम दी हुई सूचनाओं या आँकड़ों को एक अवर्गीकृत अथवा वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारणी के रूप में निरूपित करना भी सीखेंगे। *आयतचित्रों* को पढ़ने तथा उनकी व्याख्या करने की चर्चा भी इसी अध्याय में की जाएगी।

16.2 यथाप्राप्त आँकड़े

अपने दैनिक जीवन में हमें समाचार पत्रों, पत्रिकाओं, सूचना बुलेटिनों इत्यादि में कुछ आँकड़ों से संबंधित आलेख एवं सारणियाँ प्राय: देखने को मिल जाती हैं। आइए, देखें कि ये आँकड़े किस प्रकार प्राप्त किए जाते हैं।

मान लीजिए कि हमारी रुचि यह जानने में हैं कि अर्धवार्षिक परीक्षा में कक्षा VIII के 20 विद्यार्थियों में से किसने गणित में सबसे अधिक अंक प्राप्त किए और किसने सबसे कम अंक प्राप्त किए हैं। हमारी रुचि अनेक और बातों में भी हो सकती है, जैसे कि कितने विद्यार्थियों ने 60 या उससे अधिक अंक प्राप्त किए तथा कितने विद्यार्थियों ने 33 से कम अंक प्राप्त किए, इत्यादि। हम वांछित सूचना किस प्रकार प्राप्त करते हैं? हम 20 विद्यार्थियों में से प्रत्येक से उसके द्वारा अर्धवार्षिक परीक्षा में गणित में प्राप्त किए गए अंक पूछ सकते

हैं। मान लीजिए इन 20 विद्यार्थियों द्वारा (100 में से) प्राप्त किए गए अंक निम्नलिखित हैं :

45, 56, 61, 31, 56, 33, 70, 61, 76, 36, 56, 59, 64, 56, 88, 28, 56, 70, 64, 74

प्रत्येक विद्यार्थी से प्राप्त उपर्युक्त सूचना, अर्थात् प्रत्येक विद्यार्थी द्वारा प्राप्त अंक, एक *प्रेक्षण* (*observation*) कहलाती है। प्रारंभिक रूप से इस प्रकार एकत्रित किए गए प्रेक्षण *यथाप्राप्त आँकड़े* (*raw data*) कहलाते हैं।

हम इन 20 विद्यार्थियों के नाम लिख सकते हैं और न्यूनतम प्राप्त अंकों से प्रारंभ करते हुए, इन विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त किए अंक उनके नाम के आगे लिख सकते हैं। इस प्रकार, हम उपर्युक्त यथाप्राप्त आँकड़ों को एक सारणी के रूप में व्यवस्थित करते हैं, जैसा कि सारणी 16.1 (पृष्ठ 312) में दर्शाया गया है।

आइए, अब सारणी 16.1 को देखें। यह क्या दर्शाती है? सारणी पर एक दृष्टि डालने से पता चलता है कि अधिकतम प्राप्त किए गए अंक 88 हैं (मेरी द्वारा प्राप्तांक), जबकि न्यूनतम प्राप्तांक 28 हैं (दीपक द्वारा प्राप्तांक)।

प्रेक्षणों के अधिकतम एवं न्यूनतम मानों का अंतर इन प्रेक्षणों (आँकड़ों) का परिसर (range) कहलाता है।

इस प्रकार, उपर्युक्त आँकड़ों का परिसर (88 – 28) अंक = 60 अंक है। हम यह भी जानना चाहते थे कि कितने विद्यार्थियों ने 60 या उससे अधिक अंक प्राप्त किए हैं तथा कितने विद्यार्थियों ने 33 से कम अंक प्राप्त किए हैं। हम इस सारणी में ऐसे विद्यार्थियों की संख्या गिनकर ज्ञात कर सकते हैं कि 20 में से 9 विद्यार्थियों ने 60 या उससे अधिक अंक प्राप्त किए हैं तथा 20 में से 2 विद्यार्थियों ने 33 से कम अंक प्राप्त किए हैं।

टिप्पणी : सारणियाँ क्षैतिज रूप में भी बनाई जाती हैं, जैसा कि नीचे दर्शाया गया है:

नाम	कमला	सलमा	कविता	शशि
भार (*kg में*)	50	55	53	48

16.3 समांतर माध्य

आपने व्यक्तियों को औसत लंबाई, औसत चाल, औसत भार एवं औसत प्राप्तांकों, इत्यादि के बारे में बात करते अवश्य सुना होगा। शब्द *औसत* (*average*) से हमारा क्या तात्पर्य है? औसत एक ऐसी संख्या होती है जो एक दिए हुए प्रेक्षणों के समूह या आँकड़ों के केंद्रीय

सारणी 16.1 : 20 विद्यार्थियों द्वारा गणित में प्राप्त किए गए अंक

नाम	प्राप्तांक
दीपक	28
रिहाना	31
अरुण	33
सोनल	36
नीतू	45
रघु	56
विलियम	56
प्रकाश	56
रवि	56
सोहन	56
उर्मिल	59
नेल्सन	61
हैदर	61
सुधा	64
टीना	64
गौरांग	70
मल्लेश्वरी	70
सुब्रामनियम	74
अब्दुल	76
मेरी	88

अथवा प्रतिनिधि मान को दर्शाती है। यदि हमसे यह कहा जाए कि कक्षा VIII के विद्यार्थियों की औसत लंबाई 149 cm है, तो हम सोच सकते हैं कि व्यापक रूप में विद्यार्थियों की लंबाइयाँ 149 cm के इर्द-गिर्द फैली हुई हैं। हम जानते हैं कि कक्षा में सभी विद्यार्थियों की लंबाई 149 cm नहीं होगी, कुछ की लंबाई इससे कम होगी तथा कुछ की लंबाई इससे अधिक

होगी। परंतु कक्षा की औसत लंबाई हमें मोटे तौर पर उस कक्षा के विद्यार्थियों की लंबाइयों का एक व्यापक अनुमान प्रदान कर देती हैं।

औसत विभिन्न प्रकार के होते हैं। यहाँ हम एक सरलतम औसत के बारे में अध्ययन करेंगे, जिसे *समांतर माध्य* (*arithmetic mean*) या केवल *माध्य* (*mean*) कहा जाता है। इसका परिकलन सभी प्रेक्षणों के योग को प्रेक्षणों की कुल संख्या से भाग देकर किया जाता है। इस प्रकार, यदि किन्हीं दिए हुए आँकड़ों का माध्य M है, तो

$$\text{माध्य} = M = \frac{\text{सभी प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की कुल संख्या}}$$

अनुच्छेद 16.2 में दिए 20 विद्यार्थियों के प्राप्तांकों वाले उदाहरण में माध्य है:

$$M = \frac{\begin{array}{c}28 + 31 + 33 + 36 + 45 + 56 + 56 + 56 + 56 + 56 + 59 + \\ 61 + 61 + 64 + 64 + 70 + 70 + 74 + 76 + 88\end{array}}{20} \text{ अंक}$$

$$= \frac{1140}{20} \text{ अंक} = 57 \text{ अंक}$$

अत: अभीष्ट माध्य 57 अंक है।

टिप्पणी : ध्यान दीजिए कि उपर्युक्त उदाहरण में माध्य 57 है, जो यथाप्राप्त आँकड़ों के सभी प्रेक्षणों से अलग है। यद्यपि यह भी संभव है कि माध्य दिए हुए प्रेक्षणों में से कोई एक प्रेक्षण हो।

आइए, इसे स्पष्ट करने के लिए कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 1 : किसी विद्यालय के 10 शिक्षकों की आयु (वर्षों में) निम्नलिखित है:

32, 41, 28, 54, 35, 26, 23, 33, 38, 40

(i) सबसे अधिक आयु के शिक्षक की आयु क्या है तथा सबसे कम आयु के शिक्षक की आयु क्या है?

(ii) इन शिक्षकों की आयु का परिसर क्या है?

(iii) इन शिक्षकों की माध्य आयु क्या है?

हल: (i) आयु को आरोही क्रम (23, 26, 28, 32, 33, 35, 38, 40, 41, 54) में रखने पर हम ज्ञात करते हैं कि विद्यालय में सबसे अधिक आयु वाले शिक्षक की आयु 54 वर्ष है तथा सबसे कम आय वाले शिक्षक की आयु 23 वर्ष है।

(ii) परिसर (54 – 23) वर्ष, अर्थात् 31 वर्ष है।

(iii) $M = \dfrac{\text{सभी प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की कुल संख्या}}$

$$= \frac{32 + 41 + 28 + 54 + 35 + 26 + 23 + 33 + 38 + 40}{10} \text{ वर्ष}$$

$$= \frac{350}{10} \text{ वर्ष} = 35 \text{ वर्ष}$$

इस प्रकार, शिक्षकों की माध्य आयु 35 वर्ष है। ध्यान दीजिए कि इस स्थिति में माध्य यथाप्राप्त आँकड़ों में दिए हुए प्रेक्षणों में से एक प्रेक्षण है।

उदाहरण 2 : किसी कक्षा के 8 विद्यार्थियों के भार (kg में) निम्नलिखित है:

48.5, 50, 44.5, 49.5, 50.5, 45, 51, 43

(i) माध्य भार ज्ञात कीजिए।

(ii) माध्य भार क्या हो जाएगा, यदि एक शिक्षक का भार भी सम्मिलित कर लिया जाता है, जो 62 kg है?

हल : (i) $M = \dfrac{48.5 + 50.0 + 44.5 + 49.5 + 50.5 + 45.0 + 51.0 + 43.0}{8} \text{ kg}$

$$= \frac{382.0}{8} \text{ kg} = 47.75 \text{ kg} = 47.8 \text{ kg}, \text{ दशमलव के एक स्थान तक शुद्ध}$$

इस प्रकार, माध्य भार 47.8 kg है।

(ii) यदि शिक्षक का भार भी सम्मिलित कर लिया जाए, तो सभी प्रेक्षणों का योग (kg में)

$$= 48.5 + 50.0 + 44.5 + 49.5 + 50.5 + 45.0 + 51.0 + 43.0 + 62.0$$

$$= 444.0$$

प्रेक्षणों की संख्या = 8 + 1 = 9

अतः, माध्य $= \dfrac{444.0}{9} \text{ kg} = 49\dfrac{1}{3} \text{ kg}$

$$= 49.3 \text{ kg}, \text{ दशमलव के एक स्थान तक शुद्ध}$$

इस प्रकार, नया माध्य भार 49.3 kg हो जाएगा।

उदाहरण 3 : 6 प्रेक्षणों का माध्य 40 ज्ञात किया गया। बाद में यह पता चला कि एक प्रेक्षण 82 को गलती से 28 पढ़ लिया गया था। प्रेक्षणों का सही माध्य ज्ञात कीजिए।

हल : 6 प्रेक्षणों का माध्य $= 40$

$\therefore$ इन 6 प्रेक्षणों का योग $= 40 \times 6 = 240$

उपर्युक्त में प्रेक्षण 82 को गलती से 28 पढ़ लिया गया था।

अतः, इन 6 प्रेक्षणों का सही योग $= 240 - 28 + 82 = 294$

अतः, सही माध्य $= \dfrac{294}{6} = 49$

उदाहरण 4 : किसी सप्ताह-विशेष का माध्य तापमान 25°C था। सोमवार, मंगलवार, बुधवार एवं बृहस्पतिवार का माध्य तापमान 23°C था तथा बृहस्पतिवार, शुक्रवार, शनिवार एवं रविवार का माध्य तापमान 28°C था। बृहस्पतिवार का तापमान ज्ञात कीजिए।

हल : सप्ताह का माध्य तापमान $= 25°C$

$\therefore$ 7 दिनों के तापमानों का योग $= 7 \times 25°C = 175°C$ (1)

सोमवार, मंगलवार, बुधवार एवं बृहस्पतिवार के तापमानों का योग

$= 4 \times 23°C = 92°C$ (2)

बृहस्पतिवार, शुक्रवार, शनिवार एवं रविवार के तापमानों का योग

$= 4 \times 28°C = 112°C$ (3)

$\therefore$ सोमवार से रविवार तथा बृहस्पतिवार के तापमानों का योग

$= 92°C + 112°C$ [(2) और (3) से]

$= 204°C$ (4)

$\therefore$ बृहस्पतिवार का तापमान $= 204°C - 175°C = 29°C$ [(1) और (4) से]

16.4 बारंबारता बंटन सारणी

आइए, कक्षा VIII के 20 विद्यार्थियों द्वारा गणित में प्राप्त किए गए अंकों के उदाहरण (सारणी 16.1) पर पुनः विचार करें। ऐसा अनेक स्थितियों में संभव हो सकता है कि दो या अधिक प्रेक्षण एक समान हों। क्या आप यह तथ्य देख रहे हैं कि विद्यार्थियों रघु, विलियम, प्रकाश, रवि और सोहन में से प्रत्येक ने 56 अंक प्राप्त किए हैं? दूसरे शब्दों में, 56 अंक 5

विद्यार्थियों ने प्राप्त किए थे। इसी प्रकार, 61 अंक 2 विद्यार्थियों ने प्राप्त किए थे। कई बार हमारी यह जानने में रुचि होती है कि कौन-सा प्रेक्षण कितनी बार आता है।

कोई विशेष प्रेक्षण जितनी बार आता है उसे उस प्रेक्षण की बारंबारता (frequency) कहते हैं।

यह जानने के बाद कि 5 विद्यार्थियों ने 56 अंक प्राप्त किए, हम कहते हैं कि 56 की बारंबारता 5 है। इसी प्रकार, 61 की बारंबारता 2 है।

यदि हम उपर्युक्त प्रक्रिया सारणी 16.1 में दिए सभी प्रेक्षणों के लिए करें तथा आँकड़ों को सबसे छोटे से सबसे बड़े प्रेक्षणों (या सबसे बड़े से सबसे छोटे प्रेक्षणों) के क्रम में पुनर्व्यवस्थित करें, तो हमें एक बंटन (distribution) प्राप्त होगा, जो 20 विद्यार्थियों के प्राप्तांकों का *बारंबारता बंटन* (*frequency distribution*) कहलाता है। एक सारणी, जिसमें बारंबारताओं का ऐसा बंटन दिया गया हो, *बारंबारता बंटन सारणी* (*frequency distribution table*) या केवल *बारंबारता सारणी* (*frequency table*) कहलाती है। इस प्रकार, हम 20 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंकों की बारंबारता बंटन सारणी प्राप्त करते हैं (सारणी 16.2) जो अगले पृष्ठ पर है।

क्या आप देख रहे हैं कि सारणी 16.1 की तुलना में सारणी 16.2 अधिक अर्थपूर्ण है? ऐसा इसलिए है कि यह सारणी हमें एक दृष्टि में आँकड़ों की कुछ महत्त्वपूर्ण विशेषताओं के बारे में जानकारी प्राप्त करा देती है। उदाहरणार्थ, इससे तुरंत पता चल जाता है कि 5 विद्यार्थियों ने 56 अंक प्राप्त किए हैं।

16.5 मिलान चिह्नों का प्रयोग

उपर्युक्त उदाहरण में प्रेक्षणों की संख्या केवल 20 थी और इसीलिए दिए हुए आँकड़ों से प्रेक्षणों की संख्या गिनकर उनकी संगत बारंबारता ज्ञात करना सुविधाजनक था। परंतु यदि प्रेक्षणों की संख्या बहुत अधिक हो, तो यह हो सकता है कि केवल गिनकर बारंबारता ज्ञात करना सुविधाजनक न हो। ऐसी स्थितियों में, हम रेखिकाओं (|,\ ) जिन्हें *मिलान चिह्न* (*tally marks*) कहते हैं, का प्रयोग करते हैं। मिलान चिह्न बारंबारताएँ ज्ञात करने में हमें बहुत सहायक होते हैं। गिनती करने में सरलता के उद्देश्य से ये मिलान चिह्न *पाँच-पाँच के समूहों* में प्रयोग किए जाते हैं। पहले चार मिलान चिह्न ऊर्ध्वाधर रूप से अंकित किए जाते हैं। एक समूह में पाँचवाँ मिलान चिह्न पहले अंकित किए गए चारों मिलान चिह्नों को तिरछा काटते हुए अंकित किया जाता है (~~||||~~)। मिलान चिह्न अंकित करने की प्रक्रिया को हम एक उदाहरण द्वारा स्पष्ट करेंगे।

सारणी 16.2 : कक्षा VIII के 20 विद्यार्थियों द्वारा गणित में प्राप्त किए गए अंकों का बारंबारता बंटन

प्राप्तांक	*बारंबारता*
28	1
31	1
33	1
36	1
45	1
56	5
59	1
61	2
64	2
70	2
74	1
76	1
88	1
योग	**20**

उदाहरण 5 : किसी कक्षा की 30 लड़कियों की लंबाइयाँ (cm में) निम्नलिखित हैं :

140, 140, 160, 139, 153, 153, 146, 150, 148, 150, 152, 146, 154, 150, 160
148, 150, 148, 140, 148, 153, 138, 152, 150, 148, 138, 152, 140, 146, 148

उपरोक्त आँकड़ों के लिए एक बारंबारता बंटन सारणी बनाइए।

हल : हम शीर्षकों *लंबाई* (cm में), *मिलान चिह्न* एवं *बारंबारता* वाले तीन स्तंभों की एक सारणी बनाते हैं, जैसा कि सारणी 16.3 में दर्शाया गया है। शीर्षक *लंबाई* (cm में) वाले पहले स्तंभ में, हम आरोही क्रम में विभिन्न ऊँचाइयाँ 138, 139, 140, 146, 148, 150, 152, 153, 154 और 160 लिखते हैं। अब हम दिए हुए आँकड़ों पर दृष्टि डालते हैं। पहला प्रेक्षण 140 है। इसलिए हम *मिलान चिह्न* वाले स्तंभ में 140 के सम्मुख एक मिलान चिह्न अंकित करते हैं। दूसरा प्रेक्षण पुनः 140 है। इसलिए हम पुनः सारणी में 140 के सम्मुख एक मिलान

चिह्न अंकित करते हैं। तीसरा प्रेक्षण 160 है। इसलिए हम सारणी में 160 के सम्मुख एक मिलान चिह्न अंकित करते हैं और इसी प्रकार आगे भी करते जाते हैं। जब सभी प्रेक्षण समाप्त हो जाते हैं, तब हम प्रत्येक लंबाई के सम्मुख अंकित मिलान चिह्नों को गिनते हैं तथा संगत संख्या को *बारंबारता* वाले स्तंभ में लिखते हैं। इस प्रकार, हमें निम्नलिखित सारणी प्राप्त होती है :

सारणी 16.3 : 30 लड़कियों की लंबाइयों का बारंबारता बंटन

लंबाई (cm में)	*मिलान चिह्न*	*बारंबारता*
138	||	2
139	|	1
140	||||	4
146	|||	3
148	~~||||~~ |	6
150	~~||||~~	5
152	|||	3
153	|||	3
154	|	1
160	||	2
	योग	**30**

टिप्पणी : दोनों बारंबारता सारणियों (सारणी 16.2 एवं सारणी 16.3) में हम देखते हैं कि *सभी बारंबारताओं का योग प्रेक्षणों की कुल संख्या के बराबर है।*

प्रश्नावली 16.1

1. निम्नलिखित प्राप्तांकों का समांतर माध्य ज्ञात कीजिए :

8, 6, 10, 12, 1, 3, 4, 4,

इन आँकड़ों का परिसर भी ज्ञात कीजिए।

2. किसी विद्यालय में 6 क्रमागत वर्षों में विद्यार्थियों की संख्या निम्नलिखित थी :

1620, 2060, 2540, 3250, 3500, 3710

इस अवधि में विद्यालय में विद्यार्थियों की माध्य संख्या ज्ञात कीजिए।

3. विज्ञान की एक परीक्षा में विद्यार्थियों के एक समूह द्वारा (100 में से) प्राप्त किए गए अंक निम्नलिखित थे :

81, 72, 90, 90, 86, 85, 92, 70, 71

इस समूह द्वारा प्राप्त माध्य अंक ज्ञात कीजिए।

4. 10 लड़कियों की लंबाइयाँ cm में मापी गईं तथा परिणाम निम्नलिखित थे:

143, 148, 135, 150, 128, 139, 149, 146, 151, 132

(i) सबसे अधिक लंबी लड़की की लंबाई क्या है?

(ii) सबसे कम लंबी लड़की की लंबाई क्या है?

(iii) इन आँकड़ों का परिसर क्या है?

(iv) माध्य लंबाई ज्ञात कीजिए।

(v) कितनी लड़कियों की लंबाइयाँ माध्य लंबाई से कम हैं?

5. किसी शहर में एक सप्ताह-विशेष के 7 दिनों में हुई वर्षा (mm में) निम्नलिखित थी:

दिन	सोमवार	मंगलवार	बुधवार	बृहस्पतिवार	शुक्रवार	शनिवार	रविवार
वर्षा (*mm* में)	2.2	21.3	25.6	0.0	4.9	0.0	5.5

(i) उपर्युक्त आँकड़ों के अनुसार हुई वर्षा का परिसर ज्ञात कीजिए।

(ii) इस सप्ताह में हुई माध्य वर्षा ज्ञात कीजिए।

(iii) कितने दिन वर्षा माध्य वर्षा से कम थी?

6. 10 क्रमागत दिनों में किसी शहर के अधिकतम दैनिक तापमान (°C में) निम्नलिखित थे :

32.4, 29.5, 26.3, 25.7, 23.4, 24.2, 22.4, 22.5, 22.8, 23.3

(i) आँकड़ों का परिसर ज्ञात कीजिए।

(ii) माध्य दैनिक तापमान ज्ञात कीजिए।

7. मार्च 2003 के प्रथम सप्ताह में किसी अस्पताल में जन्म लेने वाले शिशुओं की संख्याएँ निम्नलिखित हैं :

18, 18, 17, 17, 10, 11, 14

उपर्युक्त सप्ताह में उस अस्पताल में जन्म लेने वाले शिशुओं की माध्य संख्या ज्ञात कीजिए।

8. विद्यार्थियों के एक समूह ने एक विशेष परीक्षा दी। विभिन्न विद्यार्थियों ने यह परीक्षा जितने मिनटों में पूरी की वे निम्नलिखित हैं:

17, 19, 20, 22, 24, 24, 28, 30, 30, 36

(i) विद्यार्थियों द्वारा परीक्षा पूरी करने में लिया गया माध्य समय ज्ञात कीजिए।

(ii) कितने विद्यार्थियों ने परीक्षा पूरी करने में माध्य समय से अधिक समय लिया?

(iii) यदि एक विद्यार्थी, जिसने परीक्षा पूरी करने में 36 मिनट लिए थे, परीक्षा पूरी करने में केवल 22 मिनट लगाता, तो माध्य समय क्या होता?

9. 5 संख्याओं का माध्य 20 है। यदि इनमें से एक संख्या निकाल दी जाए, तो शेष संख्याओं का माध्य 23 हो जाता है। निकाली गई संख्या ज्ञात कीजिए।

10. 25 प्रेक्षणों का माध्य 27 है। यदि एक नए प्रेक्षण को सम्मिलित करने पर माध्य 27 ही रहता है, तो सम्मिलित किया गया प्रेक्षण ज्ञात कीजिए।

11. पाँच प्रेक्षणों का माध्य 15 है। यदि प्रथम तीन प्रेक्षणों का माध्य 14 है तथा अंतिम तीन प्रेक्षणों का माध्य 17 है, तो तीसरा प्रेक्षण ज्ञात कीजिए।

12. प्रथम दस प्राकृत संख्याओं का माध्य ज्ञात कीजिए।

13. प्रथम छः अभाज्य संख्याओं का माध्य ज्ञात कीजिए।

14. किसी खिलाड़ी द्वारा 9 क्रिकेट मैचों में बनाए गए रन निम्नलिखित हैं:

85, 82, 91, 0, 42, 8, 29, 1, 37

ज्ञात कीजिए :

(i) खिलाड़ी द्वारा बनाए गए रनों का माध्य (औसत)

(ii) बनाए गए रनों का परिसर

15. 9 प्रेक्षणों का माध्य 35 ज्ञात किया गया। बाद में यह पता चला कि एक प्रेक्षण 81 को गलती से 18 पढ़ लिया गया था। इन प्रेक्षणों का सही माध्य ज्ञात कीजिए।

16. 33 विद्यार्थियों ने गणित की एक परीक्षा में (100 में से) निम्नलिखित अंक प्राप्त किए:

69, 48, 84, 58, 84, 48, 73, 83, 48, 66, 58, 66, 64, 71, 64, 66, 69, 66, 83, 66, 69, 71, 81, 71, 73, 69, 66, 66, 64, 58, 64, 69, 69

उपर्युक्त प्राप्तांकों के लिए एक बारंबारता सारणी बनाइए।

17. किसी नगर के 20 परिवारों में सदस्यों की संख्याएँ निम्नलिखित हैं:

6, 8, 4, 3, 5, 6, 7, 4, 3, 4, 5, 6, 4, 5, 4, 3, 3, 6, 4, 3

उपर्युक्त आँकड़ों के लिए एक बारंबारता बंटन सारणी बनाइए तथा निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(i) सबसे छोटे परिवार में कितने सदस्य हैं? इतने सदस्यों वाले कितने परिवार हैं?

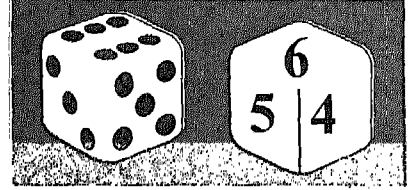
(ii) सबसे बड़े परिवार में कितने सदस्य हैं? इतने सदस्यों वाले कितने परिवार हैं?

(iii) अधिकतर परिवारों में कितने सदस्य हैं?

18. किसी शहर में हुई सड़क दुर्घटनाओं के अध्ययन में अप्रैल 2003 के 30 दिनों के प्राप्त प्रेक्षण निम्नलिखित थे:

4, 3, 5, 6, 4, 3, 2, 5, 4, 2, 6, 2, 1, 2, 2, 0, 5, 4, 6, 1, 3, 0, 5, 3, 6, 1, 5, 5, 2, 6

उपर्युक्त आँकड़ों के लिए एक बारंबारता बंटन सारणी बनाइए।

19. पासा (die) एक ऐसा घन होता है जिसके छः फलकों पर 1 से 6 तक संख्याएँ या बिंदु (प्रत्येक फलक पर एक अंक) अंकित होते हैं [आकृति 16.1]। पासे को 25 बार उछाला गया तथा निम्नलिखित अंक प्राप्त किए गए :

आकृति 16.1

5, 4, 3, 2, 1, 1, 2, 5, 4, 6, 6, 6, 3, 2, 1, 4, 3, 2, 1, 5, 6, 5, 2, 1, 3

उपर्युक्त अंकों के लिए एक बारंबारता सारणी बनाइए।

20. किसी कक्षा के 30 विद्यार्थियों के भार (kg में) निम्नलिखित हैं :

49, 48, 46, 48, 48, 50, 52, 53, 54, 43, 43, 41, 43, 55, 56, 48, 47, 41, 40, 49, 51, 51, 56, 46, 45, 44, 49, 53, 42, 47

उपर्युक्त आँकड़ों के लिए एक बारंबारता सारणी बनाइए तथा निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए:

(i) सबसे कम भार कितना है?

(ii) उपर्युक्त आँकड़ों में सबसे कम भार वाले विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

(iii) उपर्युक्त आँकड़ों में सबसे अधिक भार वाले विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

(iv) किस भार वाले विद्यार्थियों की संख्या अधिकतम है?

21. सामाजिक विज्ञान में 60 विद्यार्थियों द्वारा (50 में से) प्राप्त किए गए अंक निम्नलिखित हैं :

23, 24, 27, 37, 40, 41, 42, 21, 17, 19, 34, 36, 29, 38, 42, 39, 42, 36, 24, 21,
24, 19, 18, 27, 25, 41, 40, 30, 29, 27, 31, 37, 34, 36, 37, 42, 36, 35, 43, 37,
29, 24, 25, 29, 28, 46, 29, 39, 41, 32, 31, 32, 17, 18, 19, 23, 24, 42, 36, 35

उपर्युक्त आँकड़ों के लिए बारंबारता बंटन सारणी की रचना कीजिए। इन आँकड़ों का परिसर भी ज्ञात कीजिए।

22. 50 दशमलव स्थानों तक π का मान निम्नलिखित है:

3. 1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510

उपर्युक्त संख्या के दशमलव भाग में निम्नलिखित अंकों की बारंबारता लिखिए:

(i) 2 (ii) 3 (iii) 5 (iv) 6 (v) 9 (vi) 1

16.6 आँकड़ों का वर्गीकरण

अभी तक हमने यह सीखा है कि किस प्रकार आँकड़ों को बारंबारता वाली सारणी के रूप में संगठित किया जाता है। ऐसी सारणी यथा प्राप्त आँकड़ों की *अवर्गीकृत* (*ungrouped*) *बारंबारता बंटन* सारणी कहलाती है। हमारे प्राप्तांकों वाले पहले उदाहरण में विद्यार्थियों की संख्या केवल 20 थी। यदि आँकड़ों में प्रेक्षणों की संख्या बड़ी हो (जैसे कि प्रश्नावली 16.1 के प्रश्न 21 में), तो यह वांछनीय होता है कि दिए हुए आँकड़ों को अनेक समूहों में वर्गीकृत कर संघनित किया जाए तथा प्रत्येक समूह (वर्ग) की बारंबारता ज्ञात कर एक *बारंबारता बंटन* बनाया जाए। जब आँकड़े को इस रूप में लिखा जाता है, तो ये आँकड़े *वर्गीकृत* (*grouped*) आँकड़े कहलाते हैं तथा प्राप्त बंटन *वर्गीकृत बारंबारता बंटन* (*grouped frequency distribution*) कहलाता है। नीचे इस अवधारणा को उदाहरण द्वारा समझाया गया है।

सारणी 16.4 : 60 विद्यार्थियों द्वारा सामाजिक विज्ञान में प्राप्त किए गए अंकों का बारंबारता बंटन

वर्ग अंतराल (प्राप्तांक)	*मिलान चिह्न*	*बारंबारता*
17 – 19	卌 II	7
20 – 22	II	2
23 – 25	卌 IIII	9
26 – 28	IIII	4
29 – 31	卌 III	8
32 – 34	IIII	4
35 – 37	卌 卌 I	11
38 – 40	卌	5
41 – 43	卌 IIII	9
44 – 46	I	1
	योग	**60**

सारणी 16.4 में हमने दिए हुए 60 प्रेक्षणों को दस समूहों (वर्गों) 17 – 19, 20 – 22, 23 – 25, 26 – 28, 29 – 31, 32 – 34, 35 – 37, 38 – 40, 41 – 43 और 44 – 46 में संघनित कर लिया है। इनमें से प्रत्येक समूह एक *वर्ग अंतराल* (*class interval*) [या संक्षेप में *वर्ग* (*class*)] कहलाता है।

हम इन्हीं 60 प्रेक्षणों को दस समूहों 17– 20, 20 – 23, 23 – 26, ... तथा 44 – 47 के रूप में भी वर्गीकृत कर सकते हैं, जैसा कि सारणी 16.5 में दर्शाया गया है :

सारणी 16.5 : 60 विद्यार्थियों द्वारा सामाजिक विज्ञान में प्राप्त किए गए अंकों का बारंबारता बंटन

वर्ग अंतराल (*प्राप्तांक*)	*मिलान चिह्न*	*बारंबारता*
17 – 20	卌 ||	7
20 – 23	||	2
23 – 26	卌 ||||	9
26 – 29	||||	4
29 – 32	卌 |||	8
32 – 35	||||	4
35 – 38	卌 卌 |	11
38 – 41	卌	5
41 – 44	卌 ||||	9
44 – 47	|	1
	योग	**60**

सारणी 16.5 के वर्गों 17 – 20, 20 – 23, 23 – 26, इत्यादि से ऐसा प्रतीत होता है कि प्रेक्षण 20 दोनों वर्गों 17 – 20 और 20 – 23 में सम्मिलित है। इसी प्रकार, प्रेक्षण 23 दोनों वर्गों 20 – 23 और 23 – 26, इत्यादि में हो सकता है। परंतु ऐसा नहीं होना चाहिए, क्योंकि कोई भी प्रेक्षण एक साथ दो वर्गों (समूहों) में सम्मिलित नहीं हो सकता। इस कठिनाई से बचने के लिए, हम यह परिपाटी अपनाते हैं कि उभयनिष्ठ प्रेक्षण 20 बड़े वर्ग, अर्थात् 20 – 23 में

सम्मिलित हैं (17 – 20 में नहीं)। इसी प्रकार, 23 बड़े वर्ग 23 – 26 में सम्मिलित है (20 – 23 में नहीं), इत्यादि। उदाहरणार्थ, वर्ग 26 – 29 में वे सभी प्रेक्षण सम्मिलित हैं जो 26 के बराबर या उससे अधिक हैं परंतु 29 से कम हैं, इत्यादि। इस अध्याय में हम उसी प्रकार के वर्ग अंतराल लेंगे जैसे सारणी 16.5 में दिए गए हैं।

वर्ग अंतराल 17–20 में 17 *निम्न वर्ग सीमा* (*lower class limit*) कहलाती है तथा 20 *उच्च वर्ग सीमा* (*upper class limit*) कहलाती है। इसी प्रकार, वर्ग अंतराल 41 – 44 के लिए 41 निम्न वर्ग सीमा है तथा 44 उच्च वर्ग सीमा है। किसी अंतराल की उच्च वर्ग सीमा और निम्न वर्ग सीमा का अंतर उस अंतराल की *चौड़ाई* (*width*) या *माप* (*size*) कहलाती है। स्पष्ट है कि उपर्युक्त बंटन में प्रत्येक अंतराल की माप 3 है। किसी वर्ग अंतराल के संगत बारंबारता उसकी *वर्ग बारंबारता* (*class frequency*) कहलाती है। साथ ही, किसी वर्ग का मध्य-बिंदु उसका *वर्ग चिह्न* (*class mark*) कहलाता है। इसे निम्न और उच्च वर्ग सीमाओं के योग को 2 से विभाजित कर प्राप्त किया जाता है। उदाहरणार्थ, सारणी 16.5 के वर्ग अंतराल 17–20 का वर्ग चिह्न $\frac{17+20}{2} = 18.5$ है। इसी प्रकार, अन्य वर्ग अंतरालों के वर्ग चिह्न 21.5, 24.5, इत्यादि हैं।

टिप्पणियाँ : 1. वर्गीकृत बारंबारता बंटन में वर्ग अंतरालों की संख्या या माप निर्धारित करने का कोई निश्चित या पक्का नियम नहीं है, प्रत्येक समूह (वर्ग) की माप तथा वर्गों की संख्या का निर्धारण आँकड़ों के परिसर को दृष्टिगत रखते हुए किया जाता है।

2. विभिन्न वर्गों की चौड़ाइयाँ (माप) समान होना आवश्यक नहीं है। परंतु इस प्रकार के वर्ग मापों की चर्चा प्रस्तुत पुस्तक की सीमा के बाहर है।

आइए, इन अवधारणाओं को स्पष्ट करने के लिए कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 6 : बारंबारता बंटन सारणी (सारणी 16.6) को पढ़िए और फिर नीचे दिए गए प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(i) वर्ग अंतरालों की माप क्या है?

(ii) दूसरे वर्ग अंतराल की निम्न वर्ग सीमा क्या है?

(iii) सातवें वर्ग अंतराल की उच्च वर्ग सीमा क्या है?

(iv) किस वर्ग की बारंबारता अधिकतम है?

(v) चौथे वर्ग अंतराल का वर्ग चिह्न क्या है?

सारणी 16.6 : किसी फैक्ट्री के 600 श्रमिकों की दैनिक आय का बारंबारता बंटन

वर्ग अंतराल (रुपयों में दैनिक आय)	*बारंबारता (श्रमिकों की संख्या)*
100–125	45
125–150	25
150–175	55
175–200	50
200–225	125
225–250	140
250–275	55
275–300	35
300–325	50
325–350	20
योग	**600**

हल : (i) प्रत्येक वर्ग अंतराल की माप 25 है।

(ii) दूसरे वर्ग अंतराल (125 – 150) की निम्न वर्ग सीमा 125 है।

(iii) सातवें वर्ग अंतराल (250 – 275) की उच्च वर्ग सीमा 275 है।

(iv) वर्ग 225 – 250 की बारंबारता अधिकतम (140) है।

(v) चौथे वर्ग अंतराल (175–200) का वर्ग चिह्न $\frac{175+200}{2} = \frac{375}{2} = 187.5$ है।

उदाहरण 7 : किसी जनगणना रिपोर्ट से यादृच्छिक रूप से लिए गए एक राज्य के 80 नगरों एवं गाँवों की जनसंख्या (सौ में) निम्नलिखित हैं :

11, 72, 15, 8, 15, 3, 23, 26, 2, 319, 200, 6, 16, 6, 131, 5, 18, 240, 99, 127, 31, 72, 18, 30, 43, 2, 1, 52, 40, 3, 7, 13, 5, 142, 70, 86, 31, 38, 70, 51, 11, 52, 18, 46, 89, 1, 30, 25, 4, 52, 15, 139, 12, 277, 24, 48, 5, 26, 39, 18, 17, 159, 30, 171, 30, 6, 160, 52, 222, 13, 55, 9, 3, 149, 3, 52, 12, 124, 120, 10

वर्ग अंतराल 0 – 30, 30 – 60, 60 – 90, इत्यादि लेते हुए एक वर्गीकृत बारंबारता सारणी बनाइए। किस वर्ग की बारंबारता अधिकतम है?

हल: हमें निम्नलिखित सारणी प्राप्त होती है :

सारणी 16.7 : किसी राज्य के 80 नगरों एवं गाँवों की जनसंख्या (सौ में) का बारंबारता बंटन

जनसंख्या (सौ में)	*मिलान चिह्न*	*बारंबारता*
0 – 30	卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 ||||	39
30 – 60	卌 卌 卌	19
60 – 90	卌 |	6
90 – 120	|	1
120 – 150	卌 ||	7
150 – 180	|||	3
180 – 210	|	1
210 – 240	|	1
240 – 270	|	1
270 – 300	|	1
300 – 330	|	1
	योग	**80**

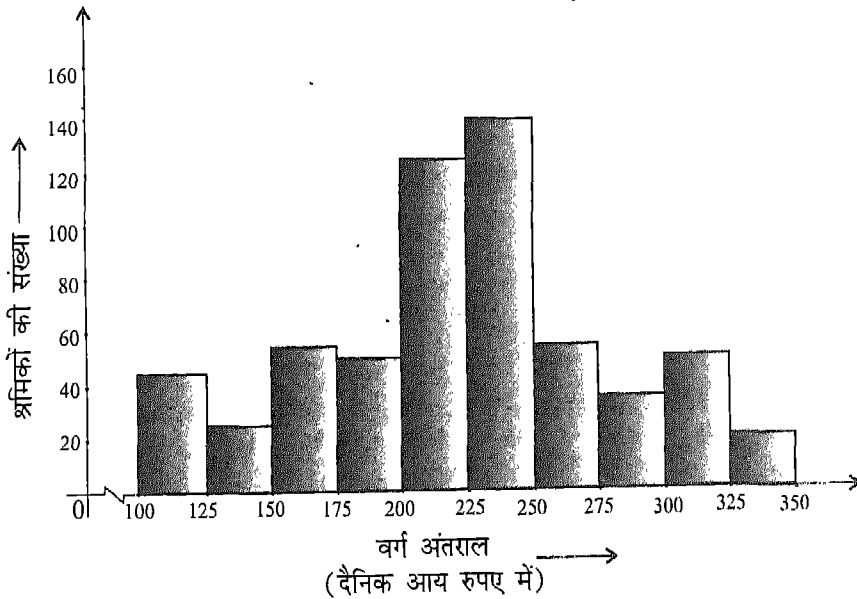
वर्ग 0–30 की बारंबारता अधिकतम है।

16.7 आयतचित्र

कक्षा VII में आपने दिए हुए आँकड़ों को एक दंड आलेख द्वारा निरूपित करना सीखा था। आइए, अब देखें कि एक वर्गीकृत बारंबारता बंटन को एक आलेख के रूप में किस प्रकार निरूपित किया जाता है। इसके लिए अधिकांश रूप से एक *आयतचित्र* (*histogram*) का प्रयोग किया जाता है (आकृति 16.2)।

आयतचित्र बनाने के लिए, हम परस्पर लंब दो अक्ष खींचते हैं और प्रत्येक अक्ष के लिए एक उपयुक्त पैमाना (scale) चुनते हैं। हम वर्गीकृत आँकड़ों के वर्ग अंतरालों को क्षैतिज अक्ष पर अंकित करते हैं तथा संगत वर्ग बारंबारताओं को ऊर्ध्वाधर अक्ष पर अंकित करते हैं। प्रत्येक वर्ग के लिए एक आयत की रचना इस प्रकार की जाती है कि उसका आधार (base) वर्ग अंतराल हो तथा उसकी ऊँचाई संगत बारंबारता से इस प्रकार निर्धारित हो कि आयतों के क्षेत्रफल वर्गों की बारंबारताओं के समानुपाती हों। चूँकि हम केवल बराबर चौड़ाई के वर्ग अंतरालों वाले वर्गीकृत बारंबारता बंटन पर ही विचार कर रहे हैं, इसलिए आयतों की ऊँचाइयाँ उनकी संगत बारंबारताओं के समानुपाती होंगी।

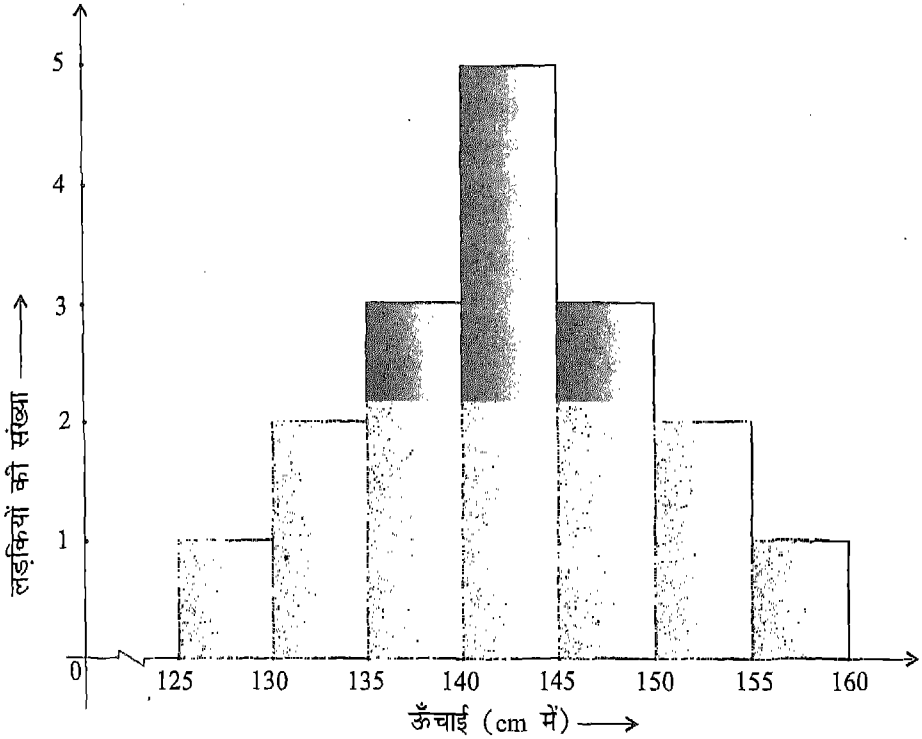
आकृति 16.2 किसी फैक्ट्री के 600 श्रमिकों की दैनिक आय के वर्गीकृत बारंबारता बंटन (सारणी 16.6) के लिए एक आयतचित्र को दर्शाती है।

सारणी 16.6 के आँकड़ों के लिए आयतचित्र

आकृति 16.2

उपर्युक्त आयतचित्र से यह स्पष्ट है कि अधिकतम श्रमिकों की दैनिक आय वर्ग 225 – 250 में है तथा श्रमिकों की न्यूनतम संख्या आय समूह 225 – 250 में है।

टिप्पणी : ध्यान दीजिए कि वर्ग अंतराल 100–125 से पहले क्षैतिज अक्ष पर एक भंग चिह्न (Kink) '   ' है। यह भंग चिह्न दर्शाता है कि क्षैतिज अक्ष पर 0 से 100 तक की पूरी दूरी दर्शाई नहीं गई है।

उदाहरण 8 : निम्नलिखित आयतचित्र को पढ़िए तथा उसके बाद दिए गए प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

किसी कक्षा की 17 लड़कियों की लंबाइयाँ (cm में) के लिए आयतचित्र

आकृति 16.3

(i) इस आयतचित्र से क्या सूचना प्रदर्शित होती है?

(ii) किस वर्ग में लड़कियों की अधिकतम संख्या सम्मिलित है?

(iii) किन वर्गों में लड़कियों की संख्याएँ बराबर हैं?

(iv) कितनी लड़कियों की लंबाइयाँ 145 cm या उससे अधिक हैं?

हल : (i) यह आयतचित्र किसी कक्षा की 17 लड़कियों की लंबाइयाँ (cm में) प्रदर्शित करता है।

(ii) वर्ग 140–145 में लड़कियों की संख्या अधिकतम है।

(iii) निम्नलिखित वर्गों में लड़कियों की संख्याएँ बराबर हैं:

(a) 125 – 130 और 155 – 160

(b) 130 – 135 और 150 – 155

(c) 135 – 140 और 145 – 150

(iv) 6 लड़कियों की लंबाइयाँ 145 cm या उससे अधिक हैं।

प्रश्नावली 16.2

1. किसी कक्षा के 40 विद्यार्थियों द्वारा एक परीक्षा में गणित में प्राप्त किए गए अंक निम्नलिखित हैं :

   3, 20, 13, 1, 21, 13, 3, 23, 16, 13, 5, 24, 15, 7, 10, 18, 18, 7, 17, 21, 15, 5, 23, 2, 12, 20, 2, 10, 16, 23, 18, 12, 6, 9, 7, 3, 5, 16, 8, 8

   उपर्युक्त आँकड़ों को, समान माप के वर्ग अंतरालों का प्रयोग करते हुए, एक वर्गीकृत बारंबारता बंटन के रूप में प्रस्तुत कीजिए, जिनमें एक वर्ग अंतराल 10–15 हो।

2. कक्षा VIII के 30 विद्यार्थियों की सप्ताहिक बचत (रुपयों में) निम्नलिखित है:

   38, 42, 40, 35, 72, 27, 57, 62, 59, 80, 84, 73, 65, 40, 76, 40, 38, 60, 58, 38, 54, 39, 50, 44, 71, 83, 45, 38, 80, 77

   उपर्युक्त आँकड़ों के लिए समान चौड़ाई वाले वर्ग अंतरालों का प्रयोग करते हुए एक वर्गीकृत बारंबारता सारणी ऐसे बनाइए कि एक वर्ग अंतराल 30–35 हो।

3. निम्नलिखित आँकड़ें किसी विद्यालय के 100 विद्यार्थियों के जेब खर्च को दर्शाते हैं :

सप्ताहिक जेब खर्च (रुपयों में)	30	35	45	50	55	60	65
विद्यार्थियों की संख्या	6	10	14	22	35	9	4

   उपर्युक्त आँकड़ों के लिए एक वर्ग अंतराल 30–40 लेते हुए, समान माप के वर्ग अंतरालों वाला एक वर्गीकृत बारंबारता बंटन बनाइए।

4. किसी मोहल्ले के 40 व्यक्तियों के भारों (kg में) का बारंबारता बंटन निम्नलिखित है :

भार (kg में)	40 – 45	45 – 50	50 – 55	55 – 60	60 – 65
बारंबारता	4	12	13	6	5

(i) चौथे वर्ग अंतराल की उच्च वर्ग सीमा क्या है?

(ii) सभी वर्गों के वर्ग चिह्न ज्ञात कीजिए।

(iii) प्रत्येक वर्ग अंतराल की माप क्या है?

(iv) किस वर्ग अंतराल की बारंबारता अधिकतम है?

5. किसी वर्ष के जून मास के लिए एक शहर के दैनिक अधिकतम एवं न्यूनतम तापमान (°C में) निम्नलिखित हैं:

दैनिक अधिकतम तापमान :

35.5, 35.9, 36.0, 38.4, 36.6, 40.1, 41.3, 43.3, 42.8, 32.8, 39.6, 38.0, 32.0, 35.6, 33.9, 34.5, 35.3, 35.7, 35.9, 36.4, 33.8, 33.5, 32.7, 32.9, 34.0, 34.6, 38.8, 39.8, 40.2, 41.4.

दैनिक न्यूनतम तापमान :

27.8, 23.4, 23.4, 28.0, 26.6, 29.5, 28.7, 33.5, 22.6, 23.9, 25.5, 21.7, 30.0, 31.3, 32.6, 30.0, 29.5, 25.5, 26.3, 24.3, 24.0, 23.5, 23.2, 30.6, 27.5, 28.3, 28.7, 29.6, 30.3, 32.7.

उपर्युक्त में से प्रत्येक के लिए समान वर्ग मापों का प्रयोग करते हुए, एक बारंबारता सारणी की रचना कीजिए, जिसमें अधिकतम तापमानों के लिए एक वर्ग अंतराल 36 – 37 हो तथा न्यूनतम तापमानों के लिए एक वर्ग अंतराल 24 – 25 हो।

6. एक दिन-विशेष पर 30 दवा विक्रेताओं की आय (निकटतम सौ रुपए तक) निम्नलिखित हैं:

आय (रुपयों में)	600	1500	1800	1900	2400	2600	3100	3900
विक्रेताओं की संख्या	3	7	4	5	4	3	2	2

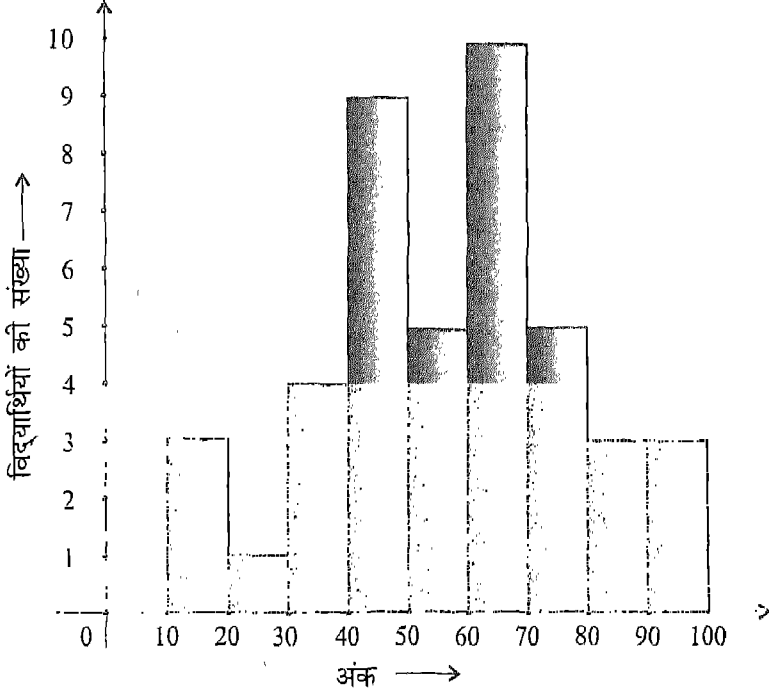
उपर्युक्त के लिए समान वर्ग मापों के वर्ग अंतरालों वाली एक बारंबारता बंटन सारणी बनाइए, जिसमें एक वर्ग अंतराल 500–1000 हो।

7. 30 व्यक्तियों की नाड़ी दर प्रति मिनट निम्नलिखित पाई गईं :

61, 76, 72, 73, 71, 66, 78, 73, 68, 81, 78, 63, 72, 75, 80, 68, 75, 62, 71, 81, 73, 60, 79, 72, 73, 74, 71, 64, 76, 71

समान चौड़ाई के वर्ग अंतरालों का प्रयोग करते हुए, एक बारंबारता सारणी की रचना कीजिए, जिसमें एक वर्ग अंतराल 60-65 हो।

8. निम्नलिखित आयतचित्र को पढ़िए तथा उसके अंत में दिए गए प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

किसी कक्षा के 43 विद्यार्थियों द्वारा भौतिकी में प्राप्त किए गए अंकों के लिए आयतचित्र

आकृति 16.4

(i) उपर्युक्त आयतचित्र से क्या सूचना प्रदर्शित होती है?

(ii) प्रत्येक वर्ग की माप क्या है?

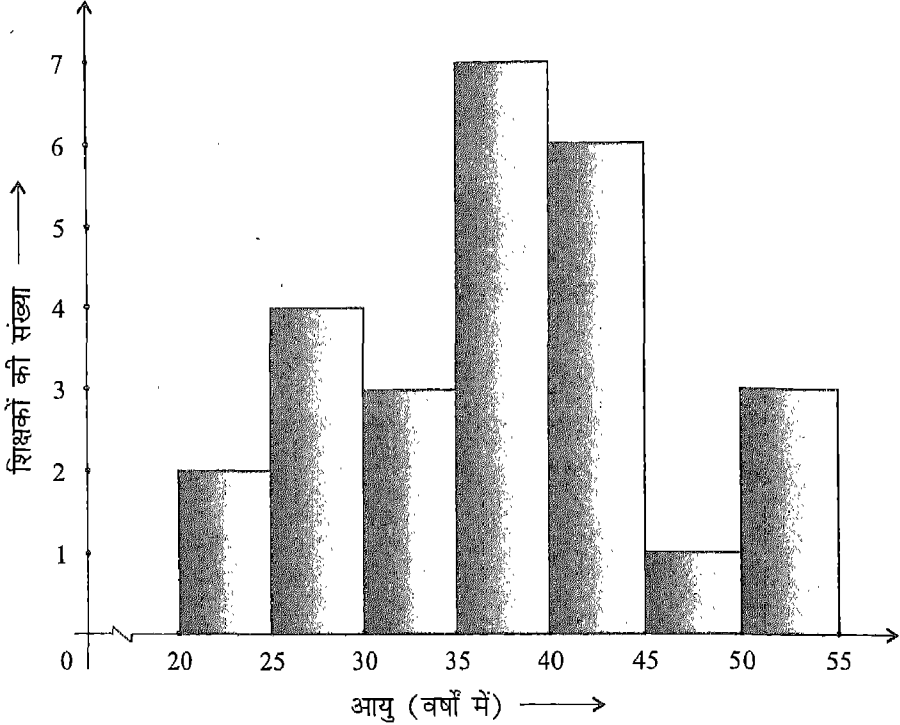
(iii) अधिकतम अंक प्राप्त करने वाले वर्ग में विद्यार्थियों की संख्या लिखिए।

(iv) किन वर्गों में विद्यार्थियों की संख्याएँ बराबर हैं?

(v) न्यूनतम अंक प्राप्त करने वाले, वर्ग में विद्यार्थियों की संख्या क्या है?

(vi) कितने विद्यार्थियों ने 60 या उससे अधिक अंक प्राप्त किए हैं?

9. निम्नलिखित आयतचित्र को पढ़िए तथा उसके बाद दिए हुए प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

किसी विद्यालय के 26 शिक्षकों की आयु (वर्षों में) के लिए आयतचित्र

आकृति 16.5

(i) उपर्युक्त आयतचित्र से क्या सूचना प्रदर्शित होती है?

(ii) विद्यालय में सबसे बड़े आयु वर्ग में शिक्षकों की संख्या क्या है?

(iii) विद्यालय में सबसे छोटे आयु वर्ग में शिक्षकों की संख्या क्या है?

(iv) किस आयु वर्ग में शिक्षकों की संख्या न्यूनतम है?

(v) किस आयु वर्ग में शिक्षकों की संख्या अधिकतम है?

(vi) प्रत्येक वर्ग अंतराल की माप क्या है?

(vii) सभी वर्ग अंतरालों के वर्ग चिह्न क्या हैं?

(viii) कितने शिक्षक 30 वर्ष से कम आयु के हैं?

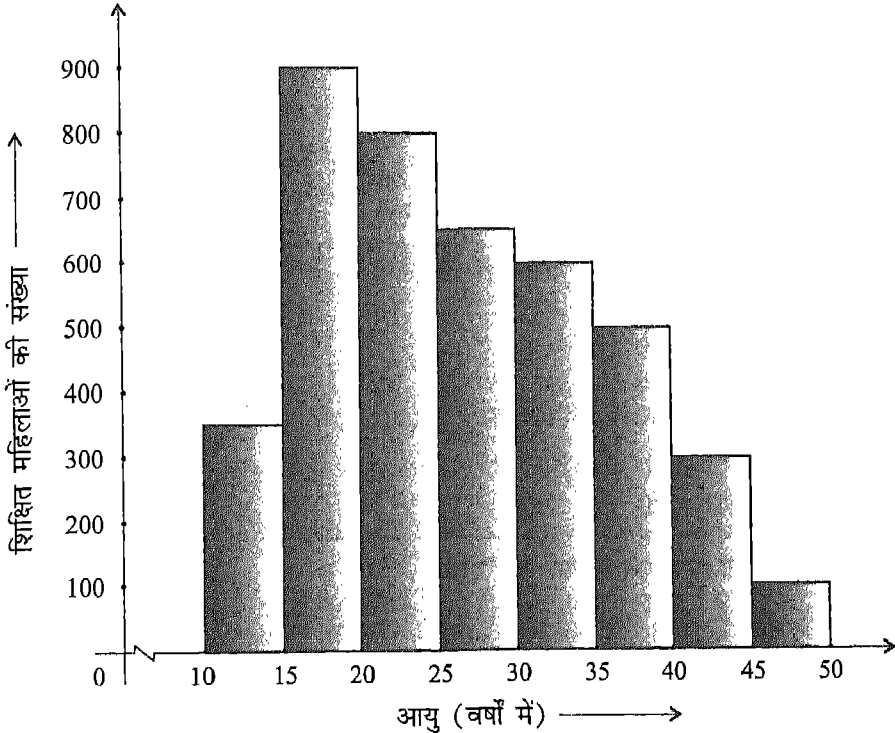
10. किसी परीक्षा में 35 विद्यार्थियों द्वारा जीव विज्ञान में प्राप्त निम्नलिखित अंकों (50 में से) के लिए, वर्ग अंतराल 0-5, 5-10, इत्यादि वर्ग अंतराल लेते हुए एक बारंबारता सारणी की रचना कीजिए :

0, 5, 6, 7, 10, 12, 14, 15, 20, 22, 25, 26, 27, 8, 11, 17, 3, 6, 9, 17, 19, 21, 22, 29, 31, 35, 37, 40, 42, 45, 49, 4, 50, 16, 20

(i) उपर्युक्त आँकड़ों का परिसर क्या है?

(ii) किस वर्ग में विद्यार्थियों की संख्या अधिकतम है?

11. निम्नलिखित आयतचित्र को पढ़िए और उसके बाद दिए हुए प्रश्नों के उत्तर दीजिए:

किसी गाँव की शिक्षित महिलाओं की संख्या के लिए आयतचित्र

आकृति 16.6

(i) उपर्युक्त आयतचित्र से क्या सूचना प्रदर्शित होती है?

(ii) किस आयु वर्ग में शिक्षित महिलाओं की संख्या अधिकतम है?

(iii) किस आयु वर्ग में शिक्षित महिलाओं की संख्या न्यूनतम है?

(iv) प्रत्येक वर्ग अंतराल की चौड़ाई क्या है?

(v) सभी वर्ग अंतरालों के वर्ग चिह्न क्या हैं?

(vi) 30 वर्ष से कम आयु की कितनी महिलाएँ शिक्षित हैं?

12. 50 व्यक्तियों के भार (kg में) निम्नलिखित बारंबारता बंटन सारणी में दिए गए हैं :

भार (kg में)	50–55	55–60	60–65	65–70	70–75	75–80	80–85	85–90
व्यक्तियों की संख्या	12	8	5	4	5	6	6	4

(i) वर्ग 50–55 में कितने व्यक्ति हैं?

(ii) अधिकतम भार वाले वर्ग में सम्मिलित व्यक्तियों की संख्या लिखिए।

(iii) वर्ग 80–85 की माप क्या है?

(iv) वर्ग 85–90 का वर्ग चिह्न क्या है?

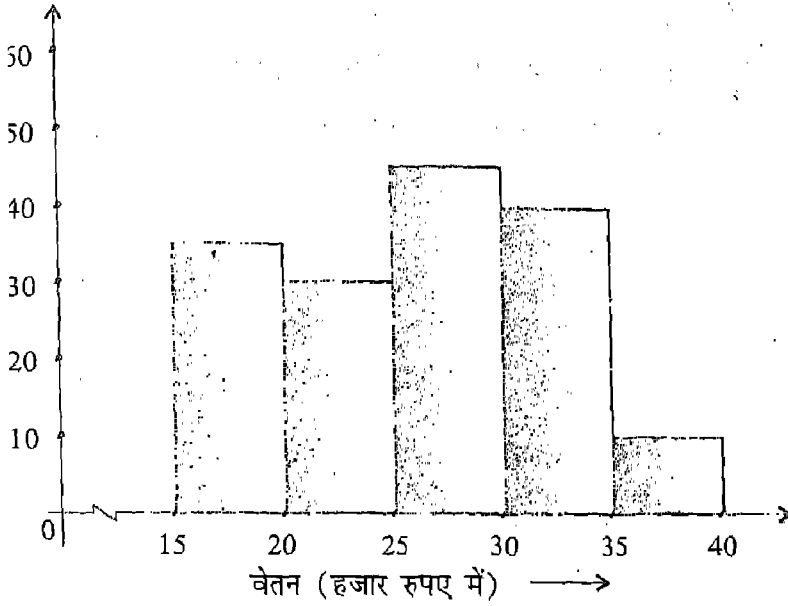
13. विद्यार्थियों के एक समूह द्वारा (100 में से) प्राप्त किए गए अंकों की निम्नलिखित बारंबारता बंटन सारणी में रिक्त स्थानों को भरिए :

प्राप्तांक	*मिलान चिह्न*	*बारंबारता*
0 – 20	|||	___
20 – 40	~~||||~~ ||	___
40 – 60	~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~ ___	18
60 – 80	~~||||~~ ~~||||~~ |	___
80 – 100	___	2

14. निम्नलिखित सारणी में रिक्त स्थानों को भरिए :

भार (kg में)	40–50	50–60	60–70	70–80	80–90
वर्ग चिह्न	—	—	—	—	—

(आयतचित्र के लिए एक वर्गीकृत बारंबारता सारणी बनाइए।

सी फैक्ट्री के कर्मचारियों के मासिक वेतन के लिए आयतचित्र

आकृति 16.7

याद रखने योग्य बातें

रूप से एकत्रित किए गए प्रेक्षण आँकड़े कहलाते हैं।

आँकड़ों में प्रेक्षणों के अधिकतम एवं न्यूनतम मानों का अंतर उनका परिसर है।

$$\text{आँकड़ों का माध्य} = \frac{\text{सभी प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की कुल संख्या}}$$

आँकड़ों में, कोई विशेष प्रेक्षण जितनी बार आता है उस संख्या को प्रेक्षण की कहते हैं।

के विभिन्न प्रेक्षणों की बारंबारताओं को दर्शाने वाली सारणी बारंबारता बंटन

7. गिनने की सुविधा के लिए, मिलान चिह्न प्राय: पाँच-पाँच के समूहों में अंकित किए जाते हैं।
8. जब प्रेक्षणों की संख्या बहुत अधिक होती हैं, तो हम आँकड़ों को समूहों में संगठित करते हैं, जिन्हें वर्ग या वर्ग अंतराल कहते हैं। इस प्रकार प्राप्त आँकड़े वर्गीकृत आँकड़े अथवा वर्गीकृत बारंबारता बंटन कहलाते हैं।
9. किसी वर्ग अंतराल के न्यूनतम मान को उसकी निम्न वर्ग सीमा तथा उच्चतम मान को उसकी उच्च वर्ग सीमा कहते हैं।
10. किसी वर्ग अंतराल के न्यूनतम एवं उच्चतम मानों के अंतर को उसकी चौड़ाई या माप कहते हैं।
11. किसी वर्ग अंतराल के मध्य-मान को उसका वर्ग चिह्न कहते हैं।
12. किसी वर्ग अंतराल की बारंबारता उसकी वर्ग बारंबारता कहलाती है।
13. आयतचित्र वर्गीकृत आँकड़ों का एक आलेखीय निरूपण होता है, जिसमें वर्ग अंतराल क्षैतिज अक्ष के अनुदिश लिए जाते हैं तथा बारंबारताएँ ऊर्ध्वाधर अक्ष के अनुदिश। प्रत्येक वर्ग के लिए एक आयत खींचा जाता है, जिसका आधार वर्ग अंतराल को लिया जाता है तथा उसकी ऊँचाई संगत बारंबारता से निर्धारित की जाती है।

—— अतीत के झरोखे से ——

हम सभी सांख्यिकी की अवधारणाओं से किसी न किसी रूप में परिचित हैं, क्योंकि सभी पत्रिकाएँ, समाचार पत्र, रेडियो एवं टी.वी. के विज्ञापन सांख्यिकी अथवा संख्यात्मक आँकड़ों से परिपूर्ण होते हैं। संख्यात्मक (अथवा सांख्यिक) आँकड़ों को एकत्रित करने की प्रथा प्राचीन भारत में भी थी। इसका प्रमाण यह है कि *चंद्रगुप्त मौर्य* (324-320 ईसा पूर्व) के राज्य काल में इस प्रकार के, विशेषत: जन्म और मृत्यु से संबंधित आँकड़े एकत्र करने का बहुत अच्छा प्रबंध था। *अकबर* के राज्य काल (1556-1605 ई.) में उस समय के भू-राजस्व मंत्री *राजा टोडरमल* भी भूमि तथा कृषि से संबंधित आँकड़ों का अभिलेख भली-भाँति रखते थे। *अबुल फजल* द्वारा लिखित *आइन-ए-अकबरी* (1596-97 ई.) में उस अवधि में किए गए प्रशासकीय तथा सांख्यिक सर्वेक्षणों का विस्तृत विवरण मिलता है।

आधुनिक अर्थ में पहला वास्तविक सांख्यिकीविद् एक अंग्रेज दुकानदार *जॉन ग्रोंट* (1620-1674) को माना जा सकता है। उसकी रुचि *जोफल्न* (*Jawfaln*), *किंगस-इविल* (*Kings–Evil*), *ग्रह* (*Planet*) और *टिस्सिक* (*Tissik*) (ये सभी रोग हैं !) तथा अन्य ऐसे कारणों में हुई जिनसे उस समय लंदन में मृत्यु हो जाती थी। उसने इनसे संबंधित आँकड़े एकत्रित किए तथा उनका संसाधन किया। यह सांख्यिकी की शुरूआत थी।

ग्रोंट की तकनीक से प्रभावित होकर, अनेक गणितज्ञों ने जिनमें *लाप्लास* (1749-1827) और *गौस* (1777-1855) सम्मिलित थे, सांख्यिकी की आधारभूत अवधारणाओं का विकास किया। जैविकीविदों ने इन अवधारणाओं को समझा तथा सांख्यिकी की तकनीकों का प्रयोग करके अपने क्षेत्र में महत्त्वपूर्ण सिद्धांत स्थापित किए। इनमें जो प्रसिद्ध हैं वे थे : *चार्ल्स डार्विन* (1809-1882) और उसका विकास का सिद्धांत (Theory of evolution), *ग्रेगर मेंडेल* (1822-1884) और उसके मटर पर प्रयोग (peas–experiment), *कार्ल पियर्सन* (1857-1936) और उसका सहसंबंध सिद्धांत जो हमें यह बताता है कि किस प्रकार निर्धारित किया जाए कि एक वस्तु दूसरी वस्तु पर प्रभाव डालती है अथवा नहीं तथा यदि डालती है तो कितना।

आज जीवन का कोई ऐसा क्षेत्र नहीं है जहाँ सांख्यिकी एक महत्त्वपूर्ण भूमिका न अदा करती हो।

उत्तरमाला

प्रश्नावली 1.1

1. संख्याएँ जिनके अंतिम अंक 2, 3, 7, 8 हों, वे वर्ग संख्याएँ नहीं होती हैं।

2. (i) 1 (ii) 4 (iii) 1 (iv) 9 (v) 6
   (vi) 9 (vii) 4 (viii) 0 (ix) 6 (x) 5

3. (i) संख्याएँ जिनके अंत में शून्यों की संख्या विषम हो, वे वर्ग संख्याएँ नहीं होती हैं।

   (ii) 2 पर समाप्त होने वाली संख्याएँ वर्ग संख्याएँ नहीं होती हैं।

   (iii) जैसा (i) में है।

   (iv) जैसा (i) में है।

4. (i) और (iii)

6. $100001^2 = 1\underline{0000}2\underline{0000}1$

   $10000001^2 = \underline{100000020000001}$

7. $1010101^2 = \underline{1020304030201}$

   $\underline{101010101}^2 = 10203040504030201$

8. $4^2 + 5^2 + \underline{20}^2 = 21^2$, $5^2 + \underline{6}^2 + 30^2 = 31^2$, $6^2 + 7^2 + \underline{42}^2 = \underline{43}^2$

9. (i) 9 (ii) 36

10. (i) F (ii) F (iii) F (iv) F
    (v) T (vi) T (vii) T (viii) T

****

प्रश्नावली 1.2

1. (i) 625 (ii) 1369 (iii) 2916 (iv) 9216 (v) 5041
2. (i) 7921 (ii) 76176 (iii) 121801 (iv) 85849 (v) 25921
3. (i) 16129 (ii) 55225 (iii) 725904 (iv) 63001 (v) 251001
4 (i) 1225 (ii) 5625 (iii) 9025 (iv) 11025 (v) 42025
5. (i) 2601 (ii) 2916 (iii) 3136 (iv) 3364 (v) 3481
6. (i) 259081 (ii) 265225 (iii) 275625 (iv) 336400 (v) 285156
7. (i) 259081 (ii) 44521 (iii) 390625
8. (i) 241081 (ii) 35721 (iii) 330625

****

प्रश्नावली 1.3

1. (ii) और (iv) **2.** (i) नहीं (ii) नहीं (iii) नहीं (iv) हाँ
3. (i) 1 या 9, विषम (ii) 4 या 6 (iii) 1 या 9, विषम (iv) 5, विषम
4. (i) 11 और 13 **5.** (i) 27 (ii) 20 (iii) 42 (iv) 64
6. (i) 88 (ii) 98 (iii) 77 (iv) 84
7. (i) हाँ, 44 (ii) हाँ, 91
8. (i) 5, 30 (ii) 2, 54 (iii) 3, 60 (iv) 7, 84 (v) 3, 78
9. (i) 5, 6 (ii) 5, 27 (iii) 7, 20 (iv) 11,64
10. 49 **11.** 77

****

प्रश्नावली 1.4

1. (i) एक (ii) दो (iii) दो (iv) तीन (v) तीन
2. (i) चार (ii) चार (iii) पाँच
3. (i) 210 (ii) 165 (iii) 234 (iv) 222 (v) 316
4. (i) 625 (ii) 345 (iii) 440
5. (i) 48 (ii) 67 (iii) 59 (iv) 23

6. (i) 38	(ii) 43	(iii) 76	(iv) 89	
7. (i) 57	(ii) 31	(iii) 40	(iv) 75	
8. (i) 40	(ii) 110	(iii) 231	(iv) 1176	

****

प्रश्नावली 1.5

1. (i) $\frac{19}{25}$	(ii) $\frac{46}{123}$	**2.** (i) $\frac{129}{67}$	(ii) $\frac{333}{555}$	
3. (i) $4\frac{8}{13}$	(ii) $3\frac{4}{15}$	**4.** (i) $4\frac{23}{27}$	(ii) $7\frac{18}{35}$	
5. (i) 2.7	(ii) 4.1	(iii) 3.05	(iv) 9.21	
6. (i) 0.091	(ii) 0.231			
7. (i) 1.30	(ii) 4.81	(iii) 2.24	(iv) 4.47	(v) 0.32
8. (i) 0.13	(ii) 0.95	(iii) 2.65	(iv) 0.94	(v) 1.44
9. (i) 0.025	(ii) 0.645	(iii) 1.416	(iv) 1.049	
10. (i) F	(ii) F	(iii) F	(iv) T	(v) T

****

प्रश्नावली 2.1

1. 1, 9, 2, 7, 6, 8, 4, 3, 5

2. (i) 42875	(ii) 175616	(iii) 373248	(iv) 64964808	
(v) 274625000	(iv) 549353259			
3. (i) 42875	(ii) 175616	(iii) 373248		
4. (iii)	**5.** (iii) 3	**6.** (iii) 9		
8. (i) F	(ii) T	(iii) T	(iv) F	(v) F
(vi) F	(vii) T	(viii) F	(ix) F	(x) F

****

प्रश्नावली 2.2

1. (i) 4	(ii) 8	(iii) 12	
2. (i) नहीं	(ii) नहीं	(iii) नहीं	(iv) हाँ

3. (i) 5; 5 (ii) 2; 7 (iii) 63; 9

4. (i) 1 (ii) 4 (iii) 3 (iv) 6

5. (i) 6 (ii) 2 (iii) 8 (iv) 5

6. (i) 73 (ii) 45 (iii) 48 (iv) 36

7. (i) 63 (ii) 76 (iii) 84 (iv) 85

8. (i) – 61 (ii) –24 (iii) –83 (iv) –56

9. (i) 135 (ii) 273 (iii) 595 (iv) 385

10. (i) $\frac{9}{13}$ (ii) $\frac{15}{17}$ (iii) $\frac{21}{35}$ अर्थात् $\frac{3}{5}$ (iv) $\frac{7}{55}$

11. (i) नहीं, 3 (ii) नहीं, 5 (iii) नहीं, 169

12. (i) 9 (ii) 25 (iii) 13

****

प्रश्नावली 3.1

1. (i) 4 (ii) 3 (iii) 5 2. (i) 2 (ii) 6

3. (i) $\frac{5}{3}$ (ii) $\frac{7}{11}$ 4. (i) $\frac{5}{3}$ (ii) $\frac{7}{11}$

5. (i) $5^{\frac{1}{2}}$ (ii) $7^{\frac{1}{3}}$ (iii) $1100^{\frac{1}{9}}$ (iv) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$ (v) $\left(\frac{61}{1123}\right)^{\frac{1}{8}}$

6. (i) $\sqrt{16}$; 16, 2 (ii) $\sqrt[3]{125}$; 125,3 (iii) $\sqrt[9]{\frac{6}{17}}$; $\frac{6}{17}$; 9

(iv) $\sqrt[11]{\frac{11}{23}}$; $\frac{11}{23}$, 11 (v) $\sqrt[17]{\frac{61}{328}}$; $\frac{61}{328}$, 17

7. (i) 32 (ii) $\frac{27}{8}$ (iii) $\frac{78125}{823543}$ (iv) $\frac{8}{27}$

8. (i) 32 (ii) $\frac{27}{8}$ (iii) $\frac{78125}{823543}$ (iv) $\frac{8}{27}$

9. (i) $\frac{1}{7}$ (ii) $\frac{3}{5}$ 10. (i) $\frac{729}{125}$ (ii) $\frac{243}{32}$

11. (i) 529 (ii) $\frac{1}{1331}$ (iii) 27 (iv) $\frac{1}{3}$

12. (i) 225 (ii) $\left(\frac{13}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ (iii) $\frac{1}{3}$ (iv) $\frac{1}{27}$

13. (i) 0.008 (ii) 0.04 (iii) 15.625 (iv) 0.00032

14. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) 2197 (iii) 15 (iv) $\frac{1}{7776}$

15. (i) T (ii) F (iii) F (iv) F (v) T
(vi) T (vii) T

****

प्रश्नावली 4.1

1. प्रत्येक 2400 रु 2. 16800 रु 3. लाभ : $9\frac{3}{8}$%

4. (i) 5940 रु (ii) 5000 रु

5. (i) 825 रु (ii) 1050 रु (iii) हानि : $1\frac{11}{25}$%

6. 2500 7. (i) 3750 रु (ii) 3375 रु 8. 7500 रु

9. 250000 रु 10. लाभ : $14\frac{6}{25}$% 11. (i) 600 रु (ii) 624 रु, 630 रु

12. 23.75% 13. हानि : 1% 14. (i) 4% (ii) 34.56 रु

15. 1592.50 रु, 2012.50 रु

****

प्रश्नावली 4.2

1. (i) 280 रु (ii) 891 रु 2. (i) 6% (ii) 20%

3. (i) 2000 रु (ii) 3000 रु 4. 1261 रु 5. 32200 रु 6. 28 %

7. 5500 रु 8. 25 % 9. 900 रु 10. 680 रु 11. 1296 रु

12. 3150 रु 13. 2880 रु 14. 1600 रु 15. 937.50 रु

****

प्रश्नावली 5.1

1. (i) 185.40 रु (ii) 293.15 रु (iii) 307.50 रु (iv) 1050 रु (v) 1414.40 रु
2. 2125 रु
3. 3310 रु
4. 7493.91 रु
5. 4413. 50 रु
6. 17576 रु; 1951 रु
7. 10360.23 रु
8. 5796 रु
9. 1261 रु
10. 1672.72 रु
11. (i) 112614 रु (ii) 10810.94 रु

****

प्रश्नावली 5.2

1. 4410 रु; 410 रु
2. 7260 रु; 1260 रु
3. 6760 रु; 510 रु
4. 24845.94 रु; 4845.94 रु
5. 39366 रु; 8116 रु
6. 4775.40 रु
7. 148877 रु
8. 49130 रु
9. 13310 रु
10. 1437.70 रु
11. फातिमा, 362.50 रु
12. 43.20 रु
13. 5369 रु
14. 1261 रु
15. 64000 रु
16. 3375 रु
17. 10000 रु
18. 400000 रु
19. 40000 रु
20. 5 %
21. 3 वर्ष
22. 2

****

प्रश्नावली 6.1

1. $x^2 + 9x + 20$
2. $x^2 + 15x + 54$
3. $x^2 + 15x + 56$
4. $x^2 + 13x + 36$
5. $x^2 + 8x + 12$
6. $x^2 + 3x - 4$
7. $p^2 + 2p - 24$
8. $y^2 + 5y - 24$
9. $x^2 - 5x + 4$
10. $z^2 - 15z + 14$
11. $y^2 - 15y + 44$
12. $x^2 + 17x - 84$
13. $x^2 + 5x - 84$
14. $y^2 + 16y - 80$
15. (i) $x^2 + \frac{26}{5}x + 1$ (ii) $y^2 + \frac{77}{12}y + \frac{5}{2}$
16. (i) $z^2 + \frac{25}{12}z + 1$ (ii) $x^4 + 13x^2 + 36$

17. (i) $y^4 + 18y^2 + 72$ (ii) $q^4 + 3q^2 - 4$

18. (i) $p^4 + \frac{63}{4}p^2 - 4$ (ii) $y^4 - \frac{73}{35}y^2 - 2$

19. (i) $z^6 + 15z^3 + 14$ (ii) $z^6 - 7z^3 - 8$

20. (i) $y^6 + \frac{13}{8}y^3 - \frac{3}{4}$ (ii) $x^6 + \frac{77}{136}x^3 - \frac{6}{17}$

21. (i) 10918 (ii) 42228

22. (i) 9120 (ii) 7052

23. (i) 10094 (ii) 9595

24. (i) 36666 (ii) 39360

25. (i) 41382 (ii) 40188

****

प्रश्नावली 6.2

1. $x^2 + 4y^2 + 16z^2 + 4xy + 16yz + 8xz$

2. $9x^2 + y^2 + 25z^2 - 6xy + 10yz - 30xz$

3. $x^2 + 4y^2 + 36z^2 + 4xy - 24yz - 12xz$

4. $9a^2 + 4b^2 + 9c^2 + 12ab - 12bc - 18ac$

5. $9a^2 + 49b^2 + c^2 - 42ab + 14bc - 6ac$

6. $25a^2 + 49b^2 + c^2 - 70ab - 14bc + 10ac$

7. $16l^2 + 4m^2 + 9n^2 + 16lm - 12mn - 24ln$

8. $4l^2 + m^2 + 64n^2 - 4lm - 16mn + 32ln$

9. $l^2 + 4m^2 + 49n^2 + 4lm - 28mn - 14ln$

10. $p^2 + 81q^2 + 4 + 18pq + 36q + 4p$

11. $36x^2 + \frac{1}{4}y^2 + 16z^2 + 6xy + 4yz + 48xz$

12. $81x^2 + y^2 + \frac{1}{9}z^2 - 18xy - \frac{2}{3}yz + 6xz$

13. $\frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{4}b^2 + 256 - \frac{1}{4}ab - 16b + 8a$

14. $a^2 + \frac{1}{4}b^2 + 36 + ab + 6b + 12a$

15. $9x^2 + 16y^2 + 4z^2 - 24xy - 16yz + 12zx$

16. $4x^2 + 9y^2 + 25z^2 + 12xy - 30yz - 20xz$

17. $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ca$

18. $a^2 + 4b^2 + 49c^2 - 4ab - 28bc + 14ca$

19. $2p^2 + 2q^2 + 2r^2 + 4qr$

20. $2p^2 + 2q^2 + 2r^2 - 4pq$

21. $4pq + 4pr$

22. $-4qr + 4pr$

23. $8xy + 8xz$

24. $-8xy + 8xz$

****

प्रश्नावली 6.3

1. $x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$
2. $8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$
3. $a^3x^3 + 3a^2x^2by + 3axb^2y^2 + b^3y^3$
4. $x^6 + 6x^4y + 12x^2y^2 + 8y^3$
5. $8x^3 - 12x^2y^2 + 6xy^4 - y^6$
6. $-x^3 + 12x^2y - 48xy^2 + 64y^3$
7. $a^3 + 15a^2y + 75ay^2 + 125y^3$
8. $\frac{1}{27}x^3 + \frac{5}{9}x^2y + \frac{25}{9}xy^2 + \frac{125}{27}y^3$
9. $\frac{1}{27}x^3 - \frac{2}{9}x^2y + \frac{4}{9}xy^2 - \frac{8}{27}y^3$

10. (i) 224 (ii) 1944 (iii) 5833 (iv) $\frac{8001}{8}$
11. (i) 104 (ii) 61 (iii) 559 (iv) –1001
12. (i) 61 (ii) 936 (iii) 2863 (iv) 13897

13. $2a^3 + 24ab^2$
14. $2a^3 + 54ab^2$
15. $250b^3 + 120a^2b$
16. $-16b^3 - 588b$
17. $\frac{2}{27}a^3 + \frac{8}{9}ab^2$
18. $\frac{16}{27}b^3 + \frac{4}{9}a^2b$

19. (i) 1124864 (ii) 1012048064 (iii) 127263527
20. (i) 970299 (ii) 988047936 (iii) 997002999
21. (i) 214921799 (ii) 941.192 (iii) 513.922401

****

प्रश्नावली 6.4

1. $(x+1)(x+9)$
2. $(x+3)(x+4)$
3. $(y-4)(y+2)$
4. $(y-7)(y+1)$
5. $(p+4)(p-1)$
6. $(p+6)(p-2)$
7. $(m-5)(m-3)$
8. $(m-6)(m-4)$
9. $(3x+y+5z)(3x+y+5z)$
10. $(2x+3y-4z)(2x+3y-4z)$
11. $(m-2n+5z)(m-2n+5z)$
12. $(7m-2n-3z)(7m-2n-3z)$
13. $(3x+y+5)(3x+y+5)$
14. $(p+\frac{q}{2}+1)(p+\frac{2}{3}+1)$

15. $(\frac{p}{2}+\frac{q}{3}+6)(\frac{p}{2}+\frac{q}{3}+6)$

16. $(\sqrt{2}x-y+2\sqrt{2}x)(\sqrt{2}x-y+2\sqrt{2}x)$

17. $(\sqrt{3}x+\sqrt{3}y+z)(\sqrt{3}x+\sqrt{3}y+z)$

18. $(2x+y)(2x+y)(2x+y)$

19. $(2x-y)(2x-y)(2x-y)$

20. $(3q-5p)(3q-5p)(3q-5p)$

21. $(4p-3q)(4p-3q)(4p-3q)$

22. $(3-5p)(3-5p)(3-5p)$

23. $(4p-3)(4p-3)(4p-3)$

24. $(2x+9)(2x+9)(2x+9)$

25. $(3x-\frac{1}{6})(3x-\frac{1}{6})(3x-\frac{1}{6})$

****

प्रश्नावली 7.1

1. (ii), (iv), (v), (vi)

2. $4y^4 + y^2 + 6y + 9$; 4

3. $-13q^5 + 4q^2 + 12q$; 5

4. $z^2 + \frac{25}{12}z + 1$; 2

5. $x^4 + 13x^2 + 36$; 4

6. $-5y^8 + y^2 + 12$; 8

7. $4q^8 - q^6 + q^2$; 8

8. $p^7 + p^2 + 16$; 7

9. $-\frac{5}{7}y^{11} + y^3 + y^2$; 11

10. $z^6 - 15z^3 + 14$; 6

11. $z^6 - 9z^3 + 8$; 6

12. $y^6 + 9y^3 - 22$; 6

13. $x^6 + \frac{77}{136}x^3 - \frac{6}{17}$; 6

14. x

15. $-3x$

16. $\frac{2}{3}x$

17. $\frac{x}{\sqrt{5}}$

18. $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$

19. $-\sqrt{2}\,a^2$

20. $\frac{3}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$

21. $\frac{1}{3}y^3 - y^2 + \frac{1}{6}y$

22. $-2p^2 + 2p + \frac{1}{2} + \frac{2}{p}$

23. $-\frac{x^2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$

24. $\frac{5}{2}z^2 - 3z + \frac{7}{2}$

25. $\frac{q^2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}q$

26. (i) $x+2$ (ii) $x+2$ (iii) $y+3$ (iv) $y-3$

(v) $z-3$ (vi) x^2+1

****

प्रश्नावली 7.2

1. $3a-1\ ;\ 9$ **2.** $2b-\frac{1}{5}\ ;\ \frac{37}{5}$ **3.** $3p^2+p-\frac{1}{2}\ ;\ \frac{9}{2}$

4. $2q^2-\frac{5}{2}q+\frac{9}{4};-\frac{11}{2}$ **5.** $4x^2-2\ ;\ 6$ **6.** $4x^3+6x^2+2x+\frac{7}{2};\ \frac{61}{2}$

7. $y^2-y+1\ ;\ 0$ **8.** $z^3+z-1\ ;\ 1$ **9.** $x^3+5\ ;\ 5$ **10.** $y^2+3\ ;\ 6$

12. 0 **13.** 0 **14.** 1 **15.** 1

16. नहीं **17.** हाँ **18.** नहीं **19.** नहीं

20. हाँ **21.** नहीं **22.** नहीं

****

प्रश्नावली 8.1

1. $x=-7$ **2.** $x=3$ **3.** $x=-\frac{21}{2}$ **4.** $x=\frac{35}{33}$

5. $z=-\frac{19}{4}$ **6.** $y=-\frac{13}{4}$ **7.** $y=1$ **8.** $z=-\frac{3}{11}$

9. $y=\frac{2}{3}$ **10.** $y=3$ **11.** $k=4$ **12.** $p=\frac{15}{67}$

13. $x=\frac{7}{12}$ **14.** $x=-\frac{25}{7}$ **15.** $y=-48$ **16.** $z=-\frac{1}{2}$

17. $x=\frac{-118}{39}$ **18.** $y=-4$ **19.** $x=-\frac{8}{33}$ **20.** $x=10$

21. $x=2$ **22.** $y=1$

****

प्रश्नावली 8.2

1. 12, 48 **2.** 42, 56 **3.** $\frac{13}{21}$ **4.** 15, 45

5. 25, 30 **6.** 216, 222, 228 **7.** 324, 333, 342 **8.** 20 वर्ष, 28 वर्ष

9. लवली : 20 वर्ष, लकी : 50 वर्ष
10. $l = 80$ cm, $b = 40$ cm
11. 36
12. 84
13. 120 cm
14. 24000 रु
15. 31.5 km/h
16. 800 km
17. 1.5 km/h

****

प्रश्नावली 9.1

1. (i) हाँ, एक ही रेखा के समांतर रेखाएँ (ii) तीन, AB ∥ EF, EF ∥ DC, DC ∥ AB
2. छः, DE ∥ AB, FG ∥ AB, HI ∥ AB, FG ∥ DE, HI ∥ DE, HI ∥ FG
3. (i) हाँ, एक ही रेखा के समांतर रेखाएँ (ii) 50°
4. 60°
5. (i) हाँ, $\angle A + \angle B = 180^0$ (ii) हाँ, $\angle B + \angle C = 180^0$
6. (i) हाँ, एक ही रेखा पर लंब रेखाएँ (ii) 65°
7. (i) हाँ, एक ही रेखा पर लंब रेखाएँ (ii) हाँ, एक ही रेखा के समांतर रेखाएँ (iii) हाँ, (ii) से
8. तीन, AB ∥ EF, EF ∥ DC, DC ∥ AB
9. (i) T (ii) F (iii) T (iv) F (v) F (vi) F

****

प्रश्नावली 9.2

1. (i) हाँ, एक ही रेखा के समांतर रेखाएँ (ii) हाँ, समान अंतःखंड गुण
2. (i) हाँ, समान अंतःखंड गुण (ii) हाँ, AD = AE
3. (i) हाँ, समान अंतःखंड गुण (ii) हाँ, समान अंतःखंड गुण
4. (i) हाँ, समान अंतःखंड गुण (ii) हाँ, समान अंतःखंड गुण
5. (i) हाँ, समान अंतःखंड गुण (ii) हाँ, समान अंतःखंड गुण (iii) 1.5 cm
6. (i) हाँ, यह तीनों रेखाओं को भिन्न-भिन्न बिंदुओं पर काटती है।
   (ii) हाँ, यह तीनों रेखाओं को भिन्न-भिन्न बिंदुओं पर काटती है।
   (iii) हाँ, एक ही रेखा पर लंब रेखाएँ (iv) हाँ, समान अंतःखंड गुण

7. 9 cm 8. 3 cm 9. (i) $\frac{2}{3}$ (ii) 2 cm 10. $\frac{20}{3}$ m, 10 m, $\frac{40}{3}$ m

11. नहीं, समान अंतःखंड गुण 12 नहीं, समानुपातिक अंतःखंड गुण

****

प्रश्नावली 9.3

1. 2.5 cm 2. 1.7 cm 5. 4 cm

****

प्रश्नावली 10.1

1. समलंब 3. (i) समचतुर्भुज (ii) आयत (iii) वर्ग

4. 140°, 140° 5. (i) 18°, 54°, 126°, 162°

(ii) हाँ, PQ ‖ QR (iii) नहीं; PS, QR के समांतर नहीं है

6. (i) T (ii) T (iii) F (iv) T (v) F

(vi) F (vii) T (viii) T (ix) F (x) F

(xi) T (xii) F (xiii) T (xiv) F

****

प्रश्नावली 10.2

1. 14 cm 2. 110°, 70°, 110° 3. 90°

4. 9 cm, 15 cm, 9 cm, 15 cm 5. 72°, 108°, 72°, 108°

6. 50 cm, 25 cm, 50 cm, 25 cm,

7. (i) हाँ, समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ (ii) हाँ, समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ

(iii) हाँ, एक ही रेखाखंड (iv) हाँ, SSS

8. नहीं, विकर्ण परस्पर समद्विभाजित नहीं करते

9. (i) विकर्ण O पर समद्विभाजित (ii) एकांतर कोण

(iii) शीर्षाभिमुख कोण (iv) ASA; हाँ

10. (i) समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण (ii) AF, $\angle A$ का समद्विभाजक

(iii) CE, ∠ C का समद्विभांजक
(iv) (i), (ii) और (iii) से
(v) एकांतर कोण
(vi) (iv) तथा (v) से
(vii) संगत कोण बराबर
(viii) AB ∥ CD
(ix) सम्मुख भुजाएँ समांतर

****

प्रश्नावली 10.3

1. (i), (ii), (v), (vii)
2. (i), (iii), (iv), (viii), (x)

3. (i), (ii), (iii), (iv), (v), (vi), (vii), (viii), (ix), (x)

4. नहीं, विकर्ण परस्पर लंब नही है

5. (i) हाँ, आयत की सम्मुख भुजाएँ
(ii) हाँ, आयत की सम्मुख भुजाएँ
(iii) हाँ, प्रत्येक कोण 90^0
(iv) हाँ, SAS

6. (i) हाँ, विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं
(ii) हाँ, समचतुर्भुज की भुजाएँ
(iii) हाँ, SSS
(iv) हाँ, सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग (CPCT)
(v) हाँ, SSS
(vi) हाँ, CPCT
(vii) हाँ, (iv) और (vi) से

7. $120^o, 60^o, 120^o, 60^o$
8. नहीं, विकर्ण बराबर नही है

9. (i) हाँ, आयत की सम्मुख भुजाएँ
(ii) हाँ, प्रत्येक 90^0 का
(iii) हाँ, एकांतर कोण
(iv) हाँ, ASA
(v) हाँ, CPCT

10. नहीं
11. हाँ

12. नहीं
13. 13cm, 13cm, 13cm, 13cm, समचतुर्भुज
14. वर्ग

****

प्रश्नावली 11.1

5. नहीं, क्योंकि AB + AD = BD

****

प्रश्नावली 11.2

3. नहीं, क्योंकि BD + AB < AD

****

प्रश्नावली 11.3

5. नहीं, क्योंकि $\angle A + \angle B + \angle C = 365^\circ > 360^\circ$

****

प्रश्नावली 12.1

1. 3 cm **2.** 24 cm **3.** 6 cm **4.** 10 cm **5.** 5 cm

6. AB और BC के लंब समद्विभाजकों का प्रतिच्छेद बिंदु

7. (i) केंद्र से जीवा के मध्य-बिंदु को मिलाने वाला रेखाखंड (ii) जैसा (i) में
(iii) $\angle AMP + \angle BMP = 180^\circ$

8. (i) AB = BC (ii) RHS (iii) CPCT

9. (i) AB = CD (ii) RHS (iii) CPCT (iv) MS + AM = NS + NC
(v) AB – AS = CD – CS

10. (i) ASA (ii) CPCT (iii) केंद्र से समदूरस्थ जीवाएँ

11. (i) T (ii) F (iii) T (iv) T

****

प्रश्नावली 12.2

1. $120^\circ, 120^\circ, 120^\circ$

2. (i) नहीं, केंद्रीय कोण बराबर नहीं (ii) नहीं, केंद्रीय कोण बराबर नहीं
(iii) हाँ, समान केंद्रीय कोण (iv) नहीं, केंद्रीय कोण बराबर नहीं
(v) हाँ, समान केंद्रीय कोण (vi) नहीं, केंद्रीय कोण बराबर नहीं
(vii) हाँ, समान केंद्रीय कोण

3. (i) 60° (ii) 55° (iii) 40° (iv) 240°

4. (i) 90° (ii) हाँ **5.** (i) 50° (ii) 25°

6. (i) 40° (ii) 50° 7. (i) 15° (ii) 25° (iii) 100° (iv) 50°

8. (i) हाँ, एकांतर अंतःकोणों का एक युग्म

(ii) हाँ, किसी चाप द्वारा केंद्र तथा शेष वृत्त पर बनाए गए कोण

(iii) हाँ, जैसा कि (ii) में (iv) हाँ, (i), (ii) तथा (iii) से

(v) हाँ, केंद्रीय कोण बराबर 9. (i) 160° (ii) 80°

10. (i) 60° (ii) $37\frac{1}{2}^\circ$ (iii) $37\frac{1}{2}^\circ$ (iv) $22\frac{1}{2}^\circ$

****

प्रश्नावली 12.3

1. $110^\circ, 105^\circ$ 2. (i) 85° (ii) 115° (iii) 95° (iv) 65° (v) 85° (vi) 115°

3. (i) 70° (ii) 110°

4. (i) 40° (ii) 100° (iii) 70°

5. (i) तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंतःकोण

(ii) ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है।

(iii) (i) और (ii) से

6. (i) हाँ, समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण (ii) हाँ, चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण

(iii) हाँ, (i) और (ii) से (iv) हाँ, जैसा (iii) में

(v) हाँ, प्रत्येक कोण 90^0

7. (i) 180° (ii) 180° (iii) 180° (iv) 540° (v) 360°

8. (i) 55° (ii) 100°

****

प्रश्नावली 13.1

1. 84 cm^2 2. 60 dm^2 3. 285 cm^2

4. (i) 12 m^2 (ii) 1.24 m^2 (iii) 8.1 m^2 (iv) 0.0135 m^2

5. 24 cm^2 6. 2600 cm^2 7. 4 cm 8. 5 m 9. 15 cm

10. 40 m 11. 12 cm 12. 12.5 cm 13. 15 cm 14. 210 रु

****

प्रश्नावली 13.2

1. $63\ cm^2$ **2.** $4500\ dm^2$ **3.** $180\ cm^2$

4. (i) $0.6\ m^2$ (ii) $0.155\ m^2$ (iii) $3.2 m^2$ (iv) $67.5\ m^2$

5. 20 cm **6.** 10 cm **7.** 8 cm **8.** 10 m **9.** 3 m

10. $225\sqrt{3}\ cm^2$ **11.** $16\sqrt{3}\ dm^2$ **12.** $800\ cm^2$

13. (i) $120\ cm^2$ (ii) $2500\ cm^2$ (iii) $280\ cm^2$ **14.** $600\ m^2$ **15.** 200 m

16. $441\ m^2$

17. (i) $\frac{P}{2}$ वर्ग मात्रक, $\frac{P}{2}$ वर्ग मात्रक, (ii) $\frac{P}{3}$ वर्ग मात्रक, $\frac{P}{3}$ वर्ग मात्रक, $\frac{P}{3}$ वर्ग मात्रक
(iii) त्रिभुज की किसी भुजा पर उसके n बराबर भाग प्राप्त करने के लिए $(n-1)$ बिंदु अंकित कीजिए। इन बिंदुओं को सम्मुख शीर्ष से मिलाइए।

****

प्रश्नावली 13.3

1. $96\ cm^2$ **2.** $228\ dm^2$ **3.** $303\ cm^2$

4. (i) $1.6\ m^2$ (ii) $0.0725 m^2$ (iii) $28\ m^2$ (iv) $2.025\ m^2$

5. 20 cm **6.** 8 cm **7.** $\frac{10}{3}$ cm **8.** 10 m **9.** 3 m

10. 12 cm, 18 cm **11.** 10 cm, 20 cm **12.** $80\ cm^2$ **13.** $216\ cm^2$

****

प्रश्नावली 13.4

1. (i) 44 cm (ii) $34\frac{4}{7}$ dm (iii) $62\frac{6}{7}$ m

2. (i) 15.7 cm (ii) 9.42 dm (iii) 1.57 m

3. (i) 4 cm (ii) 28 dm (iii) 5 m

4. (i) 1 cm (ii) 350 dm (iii) 49 m **5.** $6\frac{2}{7}$ cm **6.** 12 cm

7. 880 m **8.** 50 **9.** 44 m **10.** 264 m **11.** 3.98 cm (लगभग)

12. 3 : 4 **13.** 30 dm **14.** 30 cm **15.** 41.1 m **16.** 2411520 km

17. 3.1415929 . . . π का एक सन्निकट मान

****

प्रश्नावली 13.5

1. (i) 1386 cm^2 (ii) 7546 dm^2 (iii) 147994 cm^2
2. (i) $314\frac{2}{7}$ cm^2 (ii) 75.46 dm^2 (iii) $3\frac{1}{7}$ m^2
3. (i) 7 cm (ii) 14 dm (iii) 63 cm
4. (i) 21 cm (ii) 10 dm (iii) 25 cm
5. (i) 20 cm (ii) 100 dm (iii) $20\sqrt{15}$ cm
6. $78\frac{4}{7}$ cm^2
7. 314.28 m^2
8. 31428.57 m^2
9. (i) 78.5 m^2 (ii) 235.5 m^2
10. 157 m^2
11. 154 m^2
12. वृत्त
13. 492.86 cm^2 (लगभग)
14. 1.7 m^2 (लगभग)
15. 5 : 6
16. 4 : 1

****

प्रश्नावली 14.1

1. 1760 cm^2
2. 1.76 m^2
3. 628 cm^2
4. 15972 cm^2
5. 1584 m^2
6. 68.75 रु
7. 0.55 cm
8. 1 m
9. (i) 968 cm^2 (ii) 1161.6 cm^2 (iii) 2140.66 cm^2
10. (i) 110 m^2 (ii) 4400 रु
11. (i) 66 m^2 (ii) 1650 रु
12. 63.53 रु

****

प्रश्नावली 14.2

1. 220 cm^2
2. (i) 198 cm^2 (ii) 352 cm^2
3. 4710 cm^2
4. 792 dm^2
5. 424.29 cm^2
6. (i) 26 m (ii) 176502.86 रु
7. (i) 8 cm (ii) 729.14 cm^2
8. 62.8 m
9. 1155 रु
10. 47.1 m^2
11. 5500 cm^2
12. 3 cm

प्रश्नावली 14.3

1. (i) 616 cm^2 (ii) 1386 cm^2 (iii) 38.5 m^2

2. (i) 1386 cm^2 (ii) 394.24 m^2 (iii) 2464 cm^2 **3.** 1 : 4

4. 27.72 रु **5.** 2993.76 रु **6.** 3.5 cm **7.** 1 : 16

8. 616 cm^2 **9.** 173.25 cm^2

10. (i) $4\pi r^2$ (ii) $4\pi r^2$ (iii) 1 : 1

****

प्रश्नावली 15.1

1. (i) 2310 cm^3 (ii) 693 cm^3 (iii) 369. 6 m^3 (iv) 38.5 m^3

2. 34.65 l **3.** 17.16 kg **4.** 49.5 kg

5. (i) 308 m^3 (ii) 0.5 m

6. (i) 770 m^3 (ii) 154 m^2 (iii) 5 m

7. बेलन, 85 cm^3 **8.** (i) 3 cm (ii) 141.3 cm^3

9. (i) 110 m^2 (ii) 1.75 m (iii) 96.25 kl **10.** 0.4708 m^2

****

प्रश्नावली 15.2

1. (i) 264 cm^3 (ii) 154 cm^3 **2.** (i) 1.232 l (ii) $\frac{11}{35}\ l$

3. 314 cm^2 **4.** 21 cm **5.** 8 cm **6.** 38.5 kl

7. (i) 48 cm (ii) 50 cm (iii) 2200 cm^2

8. (i) 226 (ii) 90 (iii) 90

9. 100 π cm^3 **10.** 240 π cm^3, 5 : 12

****

प्रश्नावली 15.3

1. (i) $1437\frac{1}{3}$ cm^3 (ii) $179\frac{1}{3}$ dm^3 (iii) 1.05 m^3 (लगभग)

2. (i) $11498\frac{2}{3}$ cm^3 (ii) 0.004851 m^3 (iii) 22.458 dm^3 (लगभग)

3. (i) 11.5 l (लगभग) (ii) 4.851 l (iii) 22.458 l

4. 0.303 l (लगभग) **5.** 345.39 g (लगभग) **6.** $\frac{1}{64}$

7. 0.06348 m^3 (लगभग) **8.** $179\frac{2}{3}$ cm^3 **9.** (i) 249.48 m^2

(ii) 523.9 m^3 (लगभग) **10.** (i) $3r$ (ii) 1 : 9

****

प्रश्नावली 16.1

1. 6, 11 **2.** 2780 **3.** 81.9

4. (i) 151 cm (ii) 128 cm (iii) 23 cm (iv) 142.1 cm (v) 4

5. (i) 25.6 mm (ii) 8.5 mm (iii) 5

6. (i) 10°C (ii) 25.25°C **7.** 15

8. (i) 25 मिनट (ii) 4 (iii) 23.6 मिनट

9. 8 **10.** 27 **11.** 18 **12.** 5.5 **13.** $\frac{41}{6}$

14. (i) 41.67 (ii) 91 **15.** 42

16.

प्राप्तांक	48	58	64	66	69	71	73	81	83	84
बारंबारता	3	3	4	7	6	3	2	1	2	2

17.

सदस्यों की संख्या	3	4	5	6	7	8
बारंबारता	5	6	3	4	1	1

(i) 3 सदस्य, 5 (ii) 8 सदस्य, 1 (iii) 4 सदस्य

18.

सड़क दुर्घटनाओं की संख्या	0	1	2	3	4	5	6
बारंबारता	2	3	6	4	4	6	5

19.

प्राप्तांक	1	2	3	4	5	6
बारंबारता	5	5	4	3	4	4

20.

भार (*kg* में)	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56
बारंबारता	1	2	1	3	1	1	2	2	4	3	1	2	1	2	1	1	2

(i) 40 kg (ii) 1 (iii) 2 (iv) 48 kg

21.

प्राप्तांक	17	18	19	21	23	24	25	27	28	29	30	31	32	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	46
बारंबारता	2	2	3	2	2	5	2	3	1	5	1	2	2	2	2	5	4	1	2	2	3	5	1	1

परिसर : 29

22. (i) 5 (ii) 8 (iii) 5 (iv) 4 (v) 8 (vi) 5

****

प्रश्नावली 16.2

1.

वर्ग-अंतराल (प्राप्तांक)	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25
बारंबारता	6	10	7	9	8

2.

साप्ताहिक बचत (रु में)	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65	65-70	70-75	75-80	80-85
बारंबारता	1	0	6	5	1	2	3	2	1	3	2	4

3.

साप्ताहिक जेबखर्च (रु में)	30-40	40-50	50-60	60-70
बारंबारता	16	14	57	13

4. (i) 60 (ii) 42.5, 47.5, 52.5, 57.5, 62.5 (iii) 5 (iv) 50–55

5.

अधिकतम तापमान (°c में)	32-33	33-34	34-35	35-36	36-37	37-38	38-39	39-40	40-41	41-42	42-43	43-44
बारंबारता	4	3	3	6	3	0	3	2	2	2	1	1

न्यूनतम तापमान (°c में)	21-22	22-23	23-24	24-25	25-26	26-27	27-28	28-29	29-30	30-31	31-32	32-33	33-34
बारंबारता	1	1	5	2	2	2	2	4	3	4	1	2	1

6.

आय (रु में)	500-1000	1000-1500	1500-2000	2000-2500	2500-3000	3000-3500	3500-4000
दवा विक्रेताओं की संख्या	3	0	16	4	3	2	2

7.

नाड़ी दर प्रति मिनट	60-65	65-70	70-75	75-80	80-85
व्यक्तियों की संख्या	5	3	12	7	3

8. (i) यह किसी कक्षा के 43 विद्यार्थियों द्वारा भौतिकी में प्राप्त किए गए अंक दर्शाता है।

(ii) 10 (iii) 3 (iv) वर्ग 10-20, 80-90, 90-100 और वर्ग 50-60, 70-80

(v) 3 (vi) 21

9. (i) यह किसी विद्यालय के 26 शिक्षकों की आयु प्रदर्शित करता है।

(ii) 3 (iii) 2 (iv) 45-50 (v) 35–40 (vi) 5

(vii) 22.5, 27.5, 32.5, 37.5, 42.5, 47.5, 52.5 (viii) 6

10.

प्राप्तांक	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55
विद्यार्थियों की संख्या	3	6	4	5	5	4	1	2	2	2	1

(i) 50 (ii) 5–10

11. (i) यह विभिन्न आयु समूहों (वर्गों) में किसी गाँव की शिक्षित महिलाओं की संख्या प्रदर्शित करता है।

(ii) 15–20 (iii) 45–50 (iv) 5

(v) 12.5, 17.5, 22.5, 27.5, 32.5, 37.5, 42.5, 47.5 (vi) 2700

12. (i) 12 (ii) 4 (iii) 5 (iv) 87.5

13.

प्राप्तांक	मिलान चिह्न	बारंबारता
0–20		③
20–40		⑦
40–60	𝍸 𝍸 𝍸 |||	18
60–80		⑪
80–100	||	2

14. वर्ग चिह्न : 45, 55, 65, 75, 85

15.

वेतन (हजार रु में)	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
कर्मचारियों की संख्या	35	30	45	40	10